詳細解答

STEP III 2001，第 8 題

純數學 • 複數軌跡

> **STEP III 2001，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q8

關鍵思路

設 $z = x + \mathrm{i}y$ 並展開：(i) 中的兩條方程都會化簡成同一個圓。至於 (ii) 中的輻角（argument）條件，可直接計算 $\frac{z-2}{z}$；輻角為 $\frac{\pi}{4}$ 的意思是「實部（real part）等於虛部（imaginary part），而且兩者皆為正數」，這就是同一個圓再加上一個不等式。在 (iii) 中，把 $z = 2/w$ 代入圓的兩種形式之中運算最簡潔的那一種。(i) 中的第二種形式正是為此而設。

解答

第 (i) 部分

設 $z = x + \mathrm{i}y$。第一條方程是

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

第二條方程是

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

每一步都可逆，所以兩條方程都等價於 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$，描述的是同一個軌跡（locus）。這個軌跡是以 $1 + \mathrm{i}$ 為圓心、半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓。它通過 0、2 和 2i（以及 $2 + 2\mathrm{i}$），最低點是 $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$，剛好在實軸（real axis）之下。

第 (ii) 部分

當 $z \neq 0$ 時，

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

因為 $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$。

想一想 $\arg(\text{某數}) = \frac{\pi}{4}$ 究竟說明了它的實部和虛部有甚麼關係？

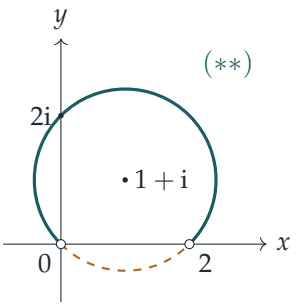
一個非零複數（complex number）$a+\mathrm{i}b$ 的輻角為 $\frac{\pi}{4}$，當且僅當它位於射線 $a = b > 0$ 上。單有相等並不足夠：$a = b < 0$ 時輻角是 $-\frac{3\pi}{4}$。分母 x^2+y^2 為正數，所以 $(**)$ 成立當且僅當

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{及} \quad 2y > 0,$$

即當且僅當 z 位於 (i) 的圓上而且 $y > 0$。條件 $y > 0$ 自動排除了 $z = 0$（該處商沒有定義）和 $z = 2$（該處商為零，沒有輻角）。

因此 $(**)$ 描述的是圓在實軸以上的部分：由 0 出發，繞經 2i 和 $2+2\mathrm{i}$ 到達 2 的優弧（major arc），兩個端點都不包括在內。實軸以下的短弧所對應的輻角則是 $-\frac{3\pi}{4}$。

這與幾何上的理解吻合。$\arg\frac{z-2}{z}$ 是在 z 處、連往 0 和連往 2 的兩條弦之間的夾角。由 0 到 2 的弦在圓心 $1+\mathrm{i}$ 所對的角是直角，所以根據圓心角定理（angle-at-the-centre theorem），它在優弧上每一點所對的角都是 $\frac{\pi}{4}$。



整個圓是 $(*)$；實線弧（不包括端點 0 和 2）是 $(**)$，虛線弧則不屬於 $(**)$。

第 (iii) 部分

由於 $w = 2/z$，我們有 $z \neq 0$ 及 $z = 2/w$。採用圓的第二種形式 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$。代入後得

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})[(1+\mathrm{i})-w]}{w},$$

其中用到 $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$。由於 $|1-\mathrm{i}|^2 = 2$，方程變成

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

所以 w 與 $1+\mathrm{i}$ 和 2 等距：軌跡是連接這兩點的線段的垂直平分線（perpendicular bisector）。中點是 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，線段的方向是 $1-\mathrm{i}$，所以平分線的方向是 $1+\mathrm{i}$。設 $w = u+\mathrm{i}v$，軌跡就是直線

$$v = u - 1.$$

這條直線上的每一點都會出現。線上每個 w 都非零，因為 0 不在這條直線上，而 $z = 2/w$ 則由上面各個可逆的步驟可知滿足 $(*)$。圓上唯一沒有像（image）的點是 $z = 0$，它被「送到無窮遠」。一如所料，通過原點的圓在 $w = 2/z$ 之下映射成一條直線。

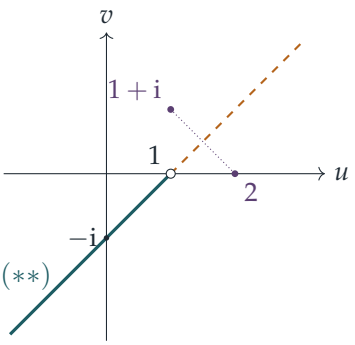
至於對應 $(**)$ 的部分，留意

$$\frac{z-2}{z} = 1 - \frac{2}{z} = 1 - w,$$

所以 $(**)$ 變成 $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$，即 $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，其中 $r > 0$。因此

$$w = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r > 0,$$

這是直線 $v = u-1$ 上由 $w = 1$（不包括在內）出發、向左下方延伸的半直線（half-line）：即 $u < 1$ 的點，等價地說是 $v < 0$ 的點。這與 (ii) 吻合：$\operatorname{Im} w = -2y/|z|^2$，所以 $y > 0$ 對應 $v < 0$。例如，$z = 2\mathrm{i}$ 映射到 $w = -\mathrm{i}$，而 $z = 2$ 則映射到被排除的端點 $w = 1$。



整條直線 $v = u-1$ 是 $(*)$ 的像；實線半直線（$u < 1$，不包括 $w = 1$）是 $(**)$ 的像。點線線段連接的是被這條直線平分的兩點。

驗算

- $z = 2\mathrm{i}$ 在圓上，而且在實軸之上：$\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$，其輻角為 $\frac{\pi}{4}$。它的像 $w = -\mathrm{i}$ 滿足 $v = u-1$，且 $u < 1$。

- 圓的最高點 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$ 映射到 $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$，而確實有 $0.2929 - 1 = -0.7071$。
- 實軸以下的一點 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ 給出 $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$。它的像有 $u > 1$，位於直線的另一半。

常見錯誤

- 把 $\arg Z = \frac{\pi}{4}$ 僅僅當作 $\operatorname{Re} Z = \operatorname{Im} Z$，於是聲稱答案是整個圓。實部和虛部還須同為正數。
- 在 (ii) 中忘記排除 $z = 0$ 和 $z = 2$，或在 (iii) 中忘記排除 $w = 1$。
- 以為圓的像必定是另一個圓。在 $w = 2/z$ 之下，通過原點的圓會變成直線。

STEP 之外

映射 $w = 2/z$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）。這類映射把圓和直線映射成圓和直線，而一個圓變成直線，當且僅當它通過那個被送到無窮遠的點。這裏弧的兩個端點 0 和 2 分別去到 ∞ 和 1。商 $\frac{z-2}{z-0}$ 量度的是這兩個端點所對的角，它變成了 $1 - w$：由像點指向 1 的方向。這就是 (ii) 中的弧在 (iii) 中變成半直線的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。