詳細解答

STEP III 2001，第 7 題

純數學 • 正交軌線

> **STEP III 2001，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q7

關鍵思路

這條微分方程（differential equation）是可分離變數（separable）的，所以只要把它解出來，就能直接看出這族曲線是甚麼。至於正交（orthogonal）曲線，切線（tangent）互相垂直即表示兩個斜率（gradient）的乘積為 -1。由此得到第二條可分離變數的方程，而對它積分時，開首所描繪的那個函數便會出現。題目先要我們畫第一幅略圖，正是為了讓我們幾乎不費工夫就能畫出最後的曲線。

解答

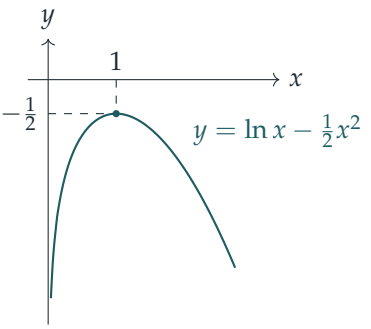
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$ 的圖像

設 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$，定義域為 $x > 0$。則

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

當 $x > 0$ 時，唯一的駐點（stationary point）位於 $x = 1$，該處 $f(1) = -\frac{1}{2}$。由於 $f'' < 0$ 處處成立，這是一個極大值（maximum），而且整個圖像都是向下凹（concave）的。所以對任何 $x > 0$ 都有 $f(x) \le -\frac{1}{2} < 0$，圖像永不與 x 軸相交。

在定義域的兩端，當 $x \to 0^+$ 時 $f(x) \to -\infty$（因為 $\ln x \to -\infty$），所以 y 軸是一條垂直漸近線（vertical asymptote）。另外，當 $x \to \infty$ 時也有 $f(x) \to -\infty$，因為 $\frac{1}{2}x^2$ 的增長遠比 $\ln x$ 快。



拋物線族

常數函數 $y = 0$ 是一個解。在其他情況下，我們分離變數，並避開 $x = \pm 1$，因為方程在該處沒有定義：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2-1| + c.$$

所以 $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2-1|$。把正負號併入常數，再連同 $y = 0$ 一併考慮，方程的解為

$$y = A(x^2-1), \qquad A \text{ 為常數.}$$

反過來，每一條這樣的曲線都滿足該方程，因為

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2xy}{x^2-1}.$$

當 $A \neq 0$ 時，每條曲線都是拋物線（parabola）。它通過 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$，因為在該兩點 $x^2-1=0$。它的斜率 $2Ax$ 只在 $x=0$ 時為零，所以它的頂點（vertex）是 $(0,-A)$，位於 y 軸上。這就是題目所求的曲線族。

正交曲線

取一點 (x,y)，其中 $x \neq \pm 1$ 且 $y \neq 0$。曲線族中恰好有一條拋物線通過這一點，即 $A = y/(x^2-1)$ 的那一條，而它在該點的斜率為 $\dfrac{2xy}{x^2-1}$。所求的曲線若要與這條拋物線成直角相交，兩個斜率的乘積必須為 -1，所以該曲線必須滿足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-1}{2xy} = \frac{1-x^2}{2xy}.$$

? **想一想** 為甚麼可以用拋物線的微分方程，而不用公式 $y = A(x^2-1)$ 來求斜率？

微分方程只用 x 和 y 就表示出通過 (x,y) 的那條族中曲線的斜率，完全不涉及 A。這正是我們所需要的，因為正交曲線在它的每一點上所遇到的都是不同的拋物線。

再次分離變數，

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

這裏取 $x > 0$，因為曲線通過 $(1,1)$。右邊是 $f(x) + C$，即我們在開首所描繪的函數。在 $(1,1)$ 處須有 $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$，所以 $C = \frac{3}{2}$，曲線為

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{或等價地} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

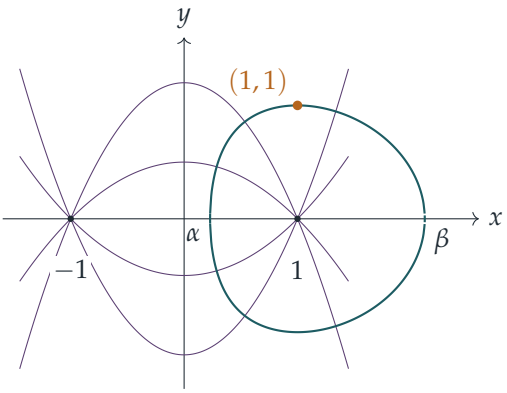
嚴格來說，微分方程通過 $(1,1)$ 的解是上半部分 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$。它對 x 軸的反射同樣與每條拋物線正交，所以自然的答案是整條閉曲線。

描繪曲線

實數點須滿足 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$。我們的第一幅略圖顯示，f 由 $-\infty$ 上升至 $x = 1$ 處的極大值 $-\frac{1}{2}$，然後再下降回 $-\infty$。所以 $f(x) = -\frac{3}{2}$ 恰好有一個根 $\alpha \in (0,1)$ 和一個根 $\beta > 1$。數值上，$\alpha \approx 0.229$，$\beta \approx 2.123$。因此：

- 曲線位於帶狀區域 $\alpha \leq x \leq \beta$ 之內，並且對 x 軸對稱；
- y^2 在 $x = 1$ 處最大，其值為 1，由此得到兩點 $(1, \pm 1)$，該處的切線是水平的；
- 在 $(\alpha, 0)$ 和 $(\beta, 0)$ 處，我們有 $y^2 = 0$，而 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 為無窮大，切線是垂直的。

所以這條曲線是一個不對稱的閉合卵形：左邊陡峭上升，右邊則較平緩地下降。圖中也畫出了幾條拋物線以作比較。



假如我們容許 $x < 0$，並把 $\ln x$ 換成 $\ln|x|$，同樣的運算還會在左半平面得出一個鏡像的卵形。那個卵形並不通過 $(1,1)$，所以不屬於答案的一部分。

驗算

- 在 $(1,1)$ 處，曲線的斜率為 $\frac{1-1}{2} = 0$。沒有任何拋物線通過 $(1,1)$ 這一點本身，因為每條拋物線與直線 $x = 1$ 只相交於 $(1,0)$。在 $x = 1$ 附近，拋物線幾乎是垂直的，這與曲線上的水平切線吻合。
- 數值上，在 $x = 0.5$ 處，曲線上 $y = \sqrt{\ln 0.5 - 0.125 + 1.5} \approx 0.826$，斜率為 $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)} \approx 0.908$。通過該點的拋物線的斜率為 $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75} \approx -1.101$，而 $0.908 \times (-1.101) \approx -1$。
- 我們在卵形上數千個隨機點驗證了正交性，並以二分法（bisection）計算出兩個根 $\alpha \approx 0.2291$ 和 $\beta \approx 2.1226$。

常見錯誤

- 使用某一條固定拋物線的斜率，例如取特定 A 值的 $2Ax$，而不是通過一般點 (x,y) 的那條族中曲線的斜率。
- 忘記 $y^2 = f(x) + \frac{3}{2}$ 需要 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$，因而畫出一條無界的曲線，而不是閉合的卵形。

STEP 之外

求一族曲線，使它與給定的曲線族成直角相交，這就是正交軌線（orthogonal trajectories）問題。在物理學中，它們以場線和等勢線的形式出現，例如在靜電學或二維流體流動之中。解析（analytic）複變函數的實部和虛部總會給出這樣的兩族曲線，這是通往保角映射（conformal mapping）的其中一條途徑。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵蓋可分離變數方程和正交軌線。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則展示了複變數的圖景。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。