詳細解答

STEP III 2001，第 6 題

純數學 • 向量與三角形的心

> **STEP III 2001，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q6

關鍵思路

一切都由平面的法向量（normal vector）$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ 決定：點 $\mathbf{r}$ 位於平面上，當且僅當 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 1$，而由 O 和 M 所作的垂線都沿 $\mathbf{n}$ 的方向。垂心（orthocentre）和外心（circumcentre）來自兩項立體幾何事實：OA、OB、OC 兩兩互相垂直；而 M 是以 OA、OB、OC 為棱的長方體的中心，所以它與 O、A、B、C 等距。至於最後一部分，兩條垂線互相平行，因此只需一對相似三角形（或一行向量代數）便可完成餘下的工作。

解答

全題中 a、b、c 均不為零（否則平面不會與三條坐標軸都相交），所以

$$A = (a,0,0), \qquad B = (0,b,0), \qquad C = (0,0,c),$$

並記 $S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$。

形心

直線 OM 上的點是 $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$。代入平面方程得 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$，所以 $t = \frac{2}{3}$，交點為

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

這正是三角形 ABC 的形心（centroid）。留意 $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$，稍後會用到。

由 O 所作的垂線：垂心

由 O 所作的垂線是直線 $\lambda\mathbf{n}$。它與平面相交於 $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ 之處，即 $\lambda=1/S$，交點為

$$H=\frac{1}{S}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right).$$

我們證明 $AH\perp BC$。利用 $\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{aS}-a\right)\cdot 0+\frac{1}{bS}\cdot(-b)+\frac{1}{cS}\cdot c=-\frac{1}{S}+\frac{1}{S}=0.$$

想一想 這個點積（dot product）是否有理由必定為零，而不只是碰巧如此？

有的。BC 位於該平面上，所以它垂直於法線 OH；而 BC 又位於 yz 平面上，所以它垂直於沿 x 軸的 OA。一條直線若垂直於兩條不平行的直線 OA 和 OH，便垂直於整個平面 OAH，當然也垂直於 AH。

把字母輪換，用同樣的論證可得 $BH\perp CA$ 和 $CH\perp AB$。由於 H 位於三角形所在的平面上，$AH\perp BC$ 即表示 H 在由 A 所作的高（altitude）上，另外兩條高亦同理。所以 H 是三角形 ABC 的垂心。

由 M 所作的垂線：外心

由 M 所作的垂線是 $M+\mu\mathbf{n}$。它與平面相交於 $\frac{3}{2}+\mu S=1$ 之處，所以 $\mu=-\dfrac{1}{2S}$，交點為

$$P=M-\frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

現在，M 與 O、A、B、C 四點全部等距：例如

$$MA^2=\left(\tfrac{1}{2}a-a\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}b\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}c\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

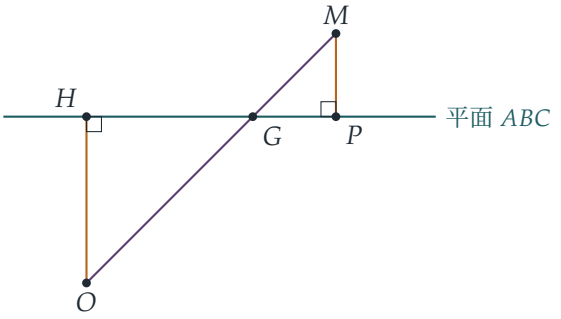
而根據對稱性，MB^2、MC^2（以及 MO^2）都得出相同的值。由於 MP 垂直於平面而 PA 位於平面上，三角形 MPA 在 P 處有一直角，所以根據畢氏定理（Pythagoras' theorem）

$$PA^2=MA^2-MP^2,$$

同樣地 $PB^2=MB^2-MP^2$ 及 $PC^2=MC^2-MP^2$。各式右方相等，所以 $PA=PB=PC$。平面上與三個頂點等距的點只有外心，所以 P 是三角形 ABC 的外心。

最後一部分

垂線 OH 和 MP 都平行於 $\mathbf{n}$，所以 O、H、M、P 位於同一平面上，而直線 OM 在 G 處穿過三角形所在的平面。此外，O 和 M 分別位於三角形所在平面的兩側，因為 $O\cdot\mathbf{n}=0<1$ 而 $M\cdot\mathbf{n}=\frac{3}{2}>1$。以下是通過這四點的截面：



三角形 OHG 和 MPG 分別在 H 和 P 處有直角，在 G 處的對頂角亦相等，所以兩者相似（similar），比為 $OG : GM = 2 : 1$。因此 $HG : GP = 2 : 1$，而且 G 位於線段 HP 上。同一結論也可直接由向量得出。以 $H = \frac{1}{S}\mathbf{n}$、$P = M - \frac{1}{2S}\mathbf{n}$ 及 $G = \frac{2}{3}M$ 代入，

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

所以 G 位於由垂心 H 至外心 P 的線段上，並把它按 $HG : GP = 2 : 1$ 的比分割，正如題目所求。（若三角形是等邊三角形，則 $H = P = G$，無需證明。）

想一想 這是否已為每一個三角形證明了這個結果？

並不盡然。要令這個論證適用，三角形必須與某個上述類型的三角形 ABC 全等（congruent）。這時它的邊滿足 $BC^2 = b^2 + c^2$、$CA^2 = c^2 + a^2$ 及 $AB^2 = a^2 + b^2$，所以

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

在 B 和 C 處亦同理。根據餘弦定理（cosine rule），每個角都是銳角。反過來說，任何銳角三角形都可以這樣實現：由這三條方程解出 a^2、b^2、c^2，它們全是正數。所以這個方法為銳角三角形證明了結果。至於直角或鈍角三角形，以下是一個簡短的平面論證，可涵蓋所有情況。把外心置於原點，則頂點 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的長度全部相同。設 $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。那麼

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

所以 $\mathbf{h}$ 在由 $\mathbf{a}$ 所作的高上，根據對稱性亦在另外兩條高上：它就是垂心。形心是 $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2 \cdot \mathbf{0})$，這正是同一個 $2 : 1$ 的結論。

驗算

取 $a = 1$、$b = c = 2$，則 $S = \frac{3}{2}$。於是 $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$、$P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ 及 $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。各點均滿足 $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$。你可以驗證 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 和 $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$，以及 $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$。我們亦曾隨機選取 3000 組正負皆有的 a、b、c，以精確算術驗證了以上所有事實。

常見錯誤

- 只證明 $AH \perp BC$ 便停下來。你需要證明全部三條高，或清楚寫明「根據對稱性」。你還需要指出 H 位於三角形所在的平面上：平面以外的點也可以滿足 $AH \perp BC$，卻不在高上。
- 把比的次序弄反。形心與垂心的距離，是它與外心的距離的兩倍。
- 聲稱「由此」（hence）的部分涵蓋每一個三角形。如上文所示，它只適用於銳角三角形。

STEP 之外

通過垂心、形心和外心的直線稱為歐拉線（Euler line）。$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$（以外心為原點）這個事實，是研究九點圓（nine-point circle）的起點；九點圓的圓心同樣在歐拉線上，位於 H 與外心的正中間。把平面圖形看成一個簡單立體圖形的截面，這種技巧在幾何中屢見不鮮。考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（《幾何學導論》），以及考克斯特與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何學重溫》），對歐拉線和九點圓都有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。