詳細解答

STEP III 2001，第 5 題

純數學 • 拋物線的法線

> **STEP III 2001，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

關鍵思路

問有哪些法線（normal）通過定點 (h,k)，其實就是問一個以參數（parameter）t 為未知數的三次方程（cubic）有多少個實根。這個三次方程沒有 t^2 項，所以它正好具有題目開首部分的形式 t^3+pt+q。實根的數目只會在兩個根合併成重根（repeated root）時才改變，因此「一條法線」與「三條法線」之間的分界，就是該三次方程有重根之處。這條分界正是我們要找的軌跡（locus）。

解答

三次方程

設 $f(x)=x^3+px+q$。當 $p\geq 0$ 時，對所有 x 都有 $f'(x)=3x^2+p\geq 0$，而 $f'(x)=0$ 最多只會在 $x=0$ 這一點出現（且僅當 $p=0$ 時）。所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上嚴格遞增（strictly increasing）：若 $x_1<x_2$，則 $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x>0$，因為被積函數（integrand）非負，而且最多只在一點為零。

此外，當 $x\to-\infty$ 時 $f(x)\to-\infty$，當 $x\to+\infty$ 時 $f(x)\to+\infty$。由於 f 連續（continuous），它必在某處取值 0；又因為它嚴格遞增，所以只會取這個值一次。因此方程恰有一個實數解。

通過 (h,k) 的法線

在 C 上，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{2a}{2at}=\dfrac{1}{t}$，所以在參數為 t 的點上，法線的斜率（gradient）是 $-t$。（這在 $t=0$ 時同樣成立：該處的切線（tangent）是鉛垂的，而法線就是 x 軸。）法

線的方程是

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{即} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

它通過 (h,k)，當且僅當 $k + th = 2at + at^3$，即

$$\boxed{at^3 + (2a - h)\,t - k = 0} \qquad \text{或者，兩邊同除以} a > 0, \qquad t^3 + \frac{2a-h}{a}\,t - \frac{k}{a} = 0.$$

想一想 兩個不同的 t 值會否給出同一條法線，以致數根的數目時把法線多算了？

不會。在 t 處的法線斜率是 $-t$，所以不同的 t 值給出斜率不同的法線，它們是不同的直線。因此，通過 (h,k) 的法線數目，正好等於該三次方程相異實根的數目。

若 $h \le 2a$，則係數 $p = \dfrac{2a-h}{a}$ 為 ≥ 0，所以由第一部分可知，該三次方程恰有一個實根。因此恰有一條 C 的法線通過 (h,k)，這正是所要證明的。

恰有兩條法線通過的點的軌跡

把三次方程寫成 $t^3 + Pt + Q = 0$，其中 $P = \dfrac{2a-h}{a}$，$Q = -\dfrac{k}{a}$。實係數三次方程的實根，按重數（multiplicity）計算，不是一個就是三個。所以它恰有兩個相異實根，當且僅當它有一個二重根（double root）s 和另一個與之不同的單根（simple root）。

由於沒有 t^2 項，各根之和為 0，所以單根是 $-2s$。我們需要 $s \ne 0$，才能保證 $-2s \ne s$。比較係數，

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2 t + 2s^3,$$

所以 $P = -3s^2$ 及 $Q = 2s^3$。換回原來的變數：

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \ne 0.$$

要消去 s，留意 $(h-2a)^3 = 27a^3s^6$ 及 $k^2 = 4a^2s^6$，所以 $4(h-2a)^3 = 108a^3s^6 = 27a\,k^2$。

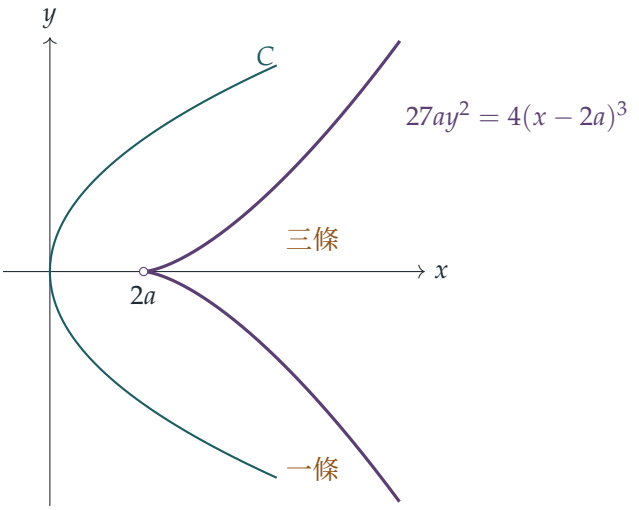
反過來，假設 $27ak^2 = 4(h-2a)^3$，且 $(h,k) \ne (2a,0)$。那麼 $h - 2a \ge 0$，而事實上 $h > 2a$（若 $h = 2a$ 則 $k = 0$）。設 s 為滿足 $2as^3 = -k$ 的實數。那麼 $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$，所以 $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$，因而 $h - 2a = 3as^2$。所以 (h,k) 具有上述形式，其中 $s \ne 0$，並且恰有兩條法線通過它。（這等價於重根條件 $4P^3 + 27Q^2 = 0$。）

點 $(2a,0)$ 本身要排除。在該處 $P = Q = 0$，三次方程是 $t^3 = 0$，有一個三重根（triple root），只有一條法線（即 x 軸）通過該點。

所以所求的軌跡是

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{不包括點} (2a,0).$$

這是一條半立方拋物線（semicubical parabola），在 $(2a, 0)$ 處有一個尖點（cusp），關於 x 軸對稱，並位於 $x \geq 2a$ 的範圍內，其中 $y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$。在它的內部（即包含正 x 軸上 $2a$ 以外部分的區域），三次方程有三個相異實根，所以每一點都有三條法線通過。在它的外部，則只有一條法線通過。



此草圖取 $a = 1$。空心圓圈標示被排除的尖點，而圖中的標籤則表示通過各區域內的點的法線數目。

驗算

- 取 $a = 1$ 及 $s = 1$，得出點 $(5, -2)$。三次方程是 $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$，所以在 $(1, 2)$ 和 $(4, -4)$ 處的法線都通過 $(5, -2)$。事實上，在 $t = 1$ 處的法線是 $y + x = 3$，而在 $t = -2$ 處的法線是 $y - 2x = -12$。兩者都包含 $(5, -2)$，而且 $27 \cdot 4 = 108 = 4 \cdot 27$。
- 在 $(5, 0.1)$（取 $a = 1$），$4P^3 + 27Q^2 = -108 + 0.27 < 0$，得出三條法線。在 $(5, 4)$，其值為 $-108 + 432 > 0$，得出一條法線。這與草圖吻合。
- 我們以數百個隨機例子，用數值方法檢驗了法線方程以及各個「只有一個根」的結論。

常見錯誤

- 忘記排除尖點 $(2a, 0)$。該點滿足方程，但只有一條法線通過。
- 聲稱當 $p \geq 0$ 時 $f'(x) > 0$。當 $p = 0$ 時，$f'(0) = 0$，所以需要用稍強一點的論證，說明 f 仍然嚴格遞增。

► 把法線的斜率寫成 $1/t$（那是切線的斜率），而不是 $-t$。

STEP 之外

這條軌跡是拋物線的*漸屈線*（evolute）：即其曲率中心（centre of curvature）所描出的曲線，同時也是其法線的包絡線（envelope）。越過漸屈線時，通過一點的法線數目會改變兩條，這是突變理論（catastrophe theory）和三次方程判別式（discriminant）背後思想的一個入門例子。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收錄了更多同類的 STEP 題目。Bruce 與 Giblin 的 *Curves and Singularities* 則嚴謹而有系統地闡述漸屈線和包絡線。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。