詳細解答

STEP III 2001，第 4 題

純數學 • 反三角函數

STEP III 2001，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s3-q4

關鍵思路

看到 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ 這個式子，應該馬上有所聯想：當 $x = \tan\theta$ 時，它正是 $\sin 2\theta$ 的「t 公式」（t-formula）。代入 $x = \tan\theta$ 之後，這個式子的 $\sin^{-1}$ 就變成 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$，於是整道題就化為：$\sin^{-1}(\sin\phi)$ 在甚麼時候真的會還原為 ϕ？答案取決於 ϕ 是否落在主值範圍（principal range）$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 之內，而在 $x = \pm 1$ 處要分段處理，原因正在於此。

解答

第 (i) 部分

先看 $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ 的一些基本性質。

- 分母永不為零，所以 g 在整條實數線上都有定義，而且處處連續（continuous）。
- $g(-x) = -g(x)$，所以 g 是奇函數（odd function），其圖像關於原點旋轉對稱。
- $g(0) = 0$；$g(x)$ 與 x 同號；而且當 $x \to \pm\infty$ 時 $g(x) \to 0$，因為分母的增長與 x^2 同階，而分子只與 x 同階。所以 x 軸是漸近線（asymptote）：當 $x \to \infty$ 時圖像從上方趨近，當 $x \to -\infty$ 時從下方趨近。

由商法則（quotient rule），

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

它只在 $x = \pm 1$ 處為零。當 $|x| < 1$ 時它是正數，當 $|x| > 1$ 時是負數，所以 $x = 1$ 給出極大值 $g(1) = 1$，$x = -1$ 給出極小值 $g(-1) = -1$。在原點的斜率（gradient）是

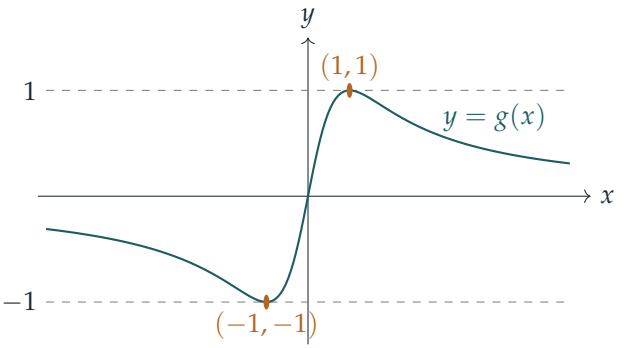
$g'(0) = 2$。

不用微積分，也可以確認這兩個轉向點（turning points）給出的是全局的最大值和最小值：

$$1 - g(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \qquad 1 + g(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0,$$

所以對所有 x 都有 $-1 \leq g(x) \leq 1$，等號只在 $x = \mp 1$ 時成立。由於 g 連續，並且取到 -1 和 1 這兩個值，所以它取遍兩者之間的每一個值（根據介值定理（intermediate value theorem））。因此

$$\text{函數} g \text{ 的值域（range）為 } -1 \leq g(x) \leq 1.$$



第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，$\frac{2x}{1+x^2}$ 總是落在 $[-1, 1]$ 之內，而這正是 $\sin^{-1}$ 的定義域（domain），所以 f 對每個實數 x 都有定義。

設 $\theta = \tan^{-1} x$，即 $x = \tan\theta$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$。那麼

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

所以

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

想一想 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ 不就是 2θ 嗎？

只有當 2θ 落在 $\sin^{-1}$ 的值域，即 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 之內時才是如此。按定義，$\sin^{-1} y$ 是該區間內正弦值等於 y 的唯一一個角。所以要求 $f(x)$，就必須在 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 內找出與 2θ 正弦值相同的那個角。

情況 $-1 \leq x \leq 1$。由於 tan 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，這表示 $-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$，所以 $-\frac{1}{2}\pi \leq 2\theta \leq \frac{1}{2}\pi$。這時 2θ 本身就是主值範圍內正弦值為 $\sin 2\theta$ 的角，所以

$$f(x) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

情況 $x \geq 1$。這時 $\frac{1}{4}\pi \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\frac{1}{2}\pi \leq 2\theta < \pi$，已經超出主值範圍。不過

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad 及 \qquad 0 < \pi - 2\theta \leq \tfrac{1}{2}\pi,$$

所以 $\pi - 2\theta$ 就是主值範圍內正弦值相符的那個角。因此

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \geq 1).$$

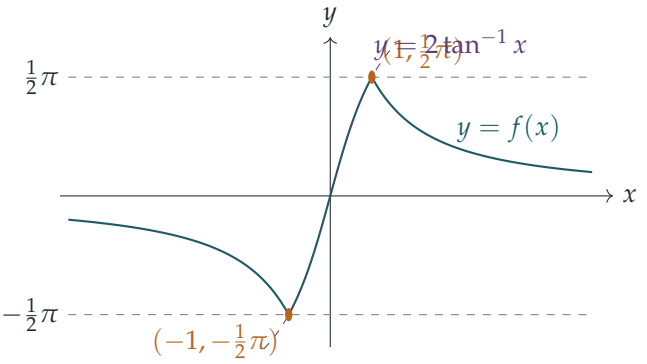
在 $x = 1$ 處，兩條公式都給出 $\frac{1}{2}\pi$，這是理所當然的。至此，題目中「證明」(show that) 的部分已經完成。

要畫出圖像，我們還需要知道 $x \leq -1$ 的情況。由於 g 是奇函數，$\sin^{-1}$ 也是奇函數，所以 f 是奇函數，於是當 $x \leq -1$ 時 $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$。(也可以這樣看：這時 $-\pi < 2\theta \leq -\frac{1}{2}\pi$，而 $-\pi - 2\theta$ 就是 $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 內正弦值相同的那個角。)

圖像的形狀。

- 在 $[-1, 1]$ 上，$f(x) = 2\tan^{-1} x$ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 遞增至 $\frac{1}{2}\pi$，並以斜率 2 通過原點。
- 當 $x \geq 1$ 時，$f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$ 由 $\frac{1}{2}\pi$ 開始遞減，並且當 $x \to \infty$ 時從上方趨向 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$。由奇函數的性質，當 $x \leq -1$ 時，隨着 $x \to -\infty$，它由 $-\frac{1}{2}\pi$ 上升，從下方趨向 0。所以 x 軸同樣是漸近線。
- 當 $|x| < 1$ 時斜率是 $\dfrac{2}{1+x^2}$，當 $|x| > 1$ 時斜率是 $-\dfrac{2}{1+x^2}$。在 $x = 1$ 處，斜率由 $+1$ 跳到 -1（在 $x = -1$ 處情況類似），所以圖像在 $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$ 處有尖角：f 在該處連續，但不可微（not differentiable）。

這些尖角可以直接從連鎖律（chain rule）看出來：$f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$，而第 (i) 部分已給出 $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$，它的平方根是 $|1-x^2|/(1+x^2)$。所以 $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$，正負號與 $1 - x^2$ 相同。



虛線顯示 $2\tan^{-1} x$ 越過 $x = 1$ 之後繼續延伸的樣子：它會升到 $\frac{1}{2}\pi$ 以上，而 $\sin^{-1}$ 的值永遠不可能這樣，所以 f 改為向下「反射」回來。

驗算

- 在 $x = \sqrt{3}$ 處：$g(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$；而公式給出 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$。兩者相符。
- 在 $x = 10$ 處：$f(10) = \sin^{-1}(20/101) \approx 0.19934$，而 $\pi - 2\tan^{-1} 10 \approx 0.19934$。用電腦在 $[-1, 1]$、$[1, 10^4]$ 和 $[-10^4, -1]$ 這三個區間內各隨機測試 10^5 個 x 值，結果兩者相符至 10^{-7} 以內，而在 $x = 1$ 處的兩個單側斜率則分別算得 $+1$ 和 -1。
- 假如 f 處處都等於 $2\tan^{-1} x$，那麼當 x 很大時它會接近 π，而 $\sin^{-1}$ 的值不可能這樣；反射正好解決了這個問題。

常見錯誤

- 沒有檢查 2θ 是否在 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 之內，就寫下 $\sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$。
- 把 f 在 $x = 1$ 處畫成平滑的圓頂。圖像在該處其實有一個尖角，因為 $\sqrt{1 - g^2}$ 涉及的是 $|1 - x^2|$，而不是 $1 - x^2$。
- 忘記當 $x \to \pm\infty$ 時 f 趨向 0（而不是 $\pm\pi$）。

STEP 之外

反三角函數（inverse trigonometric functions）是選取分支（branch）的第一個例子：sin 不是一對一（one-to-one）的，所以在求反函數之前必須先限制它的定義域，而像 $\sin^{-1}(\sin\phi) = \phi$ 這樣的恆等式，也就只在該分支上成立。同樣的問題在複分析（complex analysis）中成為核心課題，在那裏 $\log z$ 和 $z^{1/2}$ 都需要分支切割（branch cuts）。$x = 1$ 處的尖角也是一個精巧的例子：一個由平滑的片段拼合而成的函數，可以在某一點連續卻不可微。想了解分支和多值函數（multi-valued functions），並看到大量圖解，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像講解複分析）；至於連續性和可微性，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。