詳細解答

STEP III 2001，第 3 題

純數學 • 二次方程的根

> **STEP III 2001，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q3

關鍵思路

把關於根（root）的敘述轉化為關於係數（coefficient）的敘述。設兩根為 α 和 β，則 $\alpha+\beta=b$ 且 $\alpha\beta=c$，而判別式（discriminant）可告訴我們兩根何時為實數。至於第 (ii) 部分，從 $f(x)=x^2-bx+c$ 的圖像入手會較為容易：兩根都嚴格介乎 -1 與 1 之間，當且僅當拋物線（parabola）在 ±1 處取正值，且其頂點（vertex）位於兩者之間。

解答

以下一律記 $f(x)=x^2-bx+c$；當兩根為實數時，稱之為 $\alpha\le\beta$，於是

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{b^2-4c}).$$

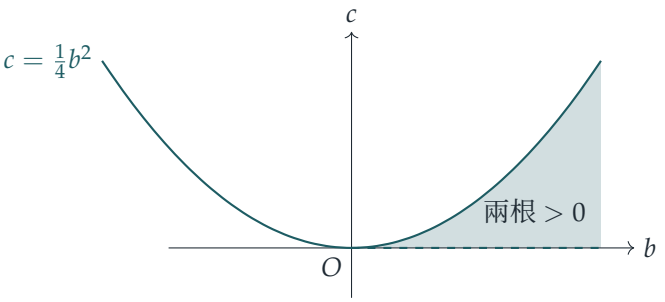
重根（repeated root）視作兩個相等的實根。

第 (i) 部分

($\Rightarrow$)假設兩根皆為正實數。有實根便須 $b^2-4c\ge0$。又因兩根皆為正數，故 $b=\alpha+\beta>0$ 且 $c=\alpha\beta>0$。合起來便得 $b>0$ 及 $b^2\ge4c>0$。

($\Leftarrow$) 假設 $b>0$ 且 $b^2\ge4c>0$。由於 $b^2-4c\ge0$，兩根為實數。由於 $\alpha\beta=c>0$，兩根均不為零且同號。由於 $\alpha+\beta=b>0$，這個共同的符號不可能是負號。所以兩根皆為正數。

這就證明了兩者等價。在 b-c 平面上，這些條件即 $b>0$ 及 $0<c\le\frac{1}{4}b^2$：也就是第一象限（first quadrant）內介乎正 b 軸與拋物線 $c=\frac{1}{4}b^2$ 之間的區域。拋物線包括在內（重根 $\frac{1}{2}b>0$），而 b 軸則不包括在內（該處 $c=0$，其中一根為 0）。



實線曲線（$b > 0$ 的部分）屬於該區域；b 軸上的虛線線段和原點則不屬於該區域。

第 (ii) 部分

我們需要兩根皆為實數，且 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$。我們斷言：在兩根為實數的前提下，這情況成立當且僅當

$$f(1) = 1 - b + c > 0, \qquad f(-1) = 1 + b + c > 0, \qquad -1 < \tfrac{1}{2}b < 1.$$

($\Rightarrow$) 若 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$，則 $f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) > 0$ 且 $f(-1) = (1+\alpha)(1+\beta) > 0$，因為每個括號內的數都是正數。此外，$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 是 $(-1, 1)$ 內兩個數的平均值，所以它也在 $(-1, 1)$ 內。

($\Leftarrow$) 因為 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ 恰好在 $[\alpha, \beta]$ 上 ≤ 0，所以條件 $f(1) > 0$ 表示 1 不在 $[\alpha, \beta]$ 內。因此要麼 $1 < \alpha$，要麼 $1 > \beta$。頂點 $\frac{1}{2}b$ 位於 $[\alpha, \beta]$ 內，而 $\frac{1}{2}b < 1$，故 $\alpha \leq \frac{1}{2}b < 1$。這就排除了 $1 < \alpha$，所以 $\beta < 1$。同理，由 $f(-1) > 0$ 和 $\frac{1}{2}b > -1$ 可得 $\alpha > -1$。

? **想一想** 為甚麼不能只用 $f(1) > 0$ 和 $f(-1) > 0$ 這兩個條件？

因為兩根有可能都落在區間的同一側。例如 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根是 2 和 3，但 $f(\pm 1) > 0$。正是頂點條件 $|b| < 2$ 令兩根落在 -1 與 1 之間，而不是同時落在某一端之外。

把這些條件與實根條件 $b^2 \geq 4c$ 合併，所求區域為

$$|b| < 2, \qquad c > b - 1, \qquad c > -b - 1, \qquad c \leq \tfrac{1}{4}b^2,$$

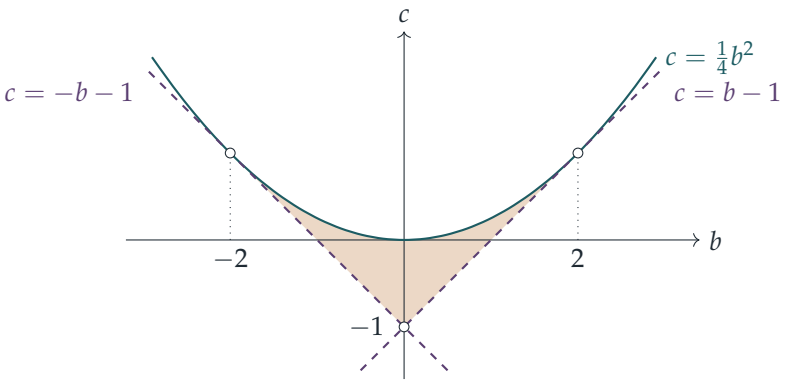
即 $|b| < 2$ 且 $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$。

繪畫草圖時，要留意兩條直線與拋物線如何相交。由於

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

直線 $c = b - 1$ 位於拋物線下方，且只在 $(2, 1)$ 與它相接。所以它就是拋物線在該點的切線（tangent）。根據對稱性（$b \mapsto -b$），$c = -b - 1$ 是在 $(-2, 1)$ 的切線。兩條直線相交

於 $(0,-1)$。所求區域是一個曲邊三角形，由這兩條切線和拋物線在兩個切點之間的弧圍成。



拋物線上 $|b|<2$ 的弧包括在內（重根 $\frac{1}{2}b$，且 $|\frac{1}{2}b|<1$）。兩段虛線切線不包括在內，因為在它們上面有一根為 ±1。三個角點 $(\pm2,1)$ 和 $(0,-1)$ 同樣不包括在內。

驗算

- $(b,c)=(0,-\frac{1}{4})$ 在第 (ii) 部分的區域之內：兩根為 $\pm\frac{1}{2}$。$(b,c)=(0,-1)$ 是被排除的角點：兩根恰好是 ±1。
- $(b,c)=(2.7,1.8)$ 滿足 $c>|b|-1$ 和 $c\le\frac{1}{4}b^2$，但 $|b|>2$。它的兩根是 1.2 和 1.5，所以頂點條件把它排除在外是正確的。
- 我們以數值方法檢驗了兩個區域：在超過 115 000 個有理點 (b,c) 上，把準確的根與所述條件互相比較，當中包括每條邊界曲線上的點。結果完全吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分遺漏頂點條件 $|b|<2$，以致錯誤地加入了 $|b|=2$ 以外、夾在每條切線與拋物線之間的狹長部分。
- 弄錯邊界：兩部分的區域都包括拋物線，但第 (i) 部分的 b 軸和第 (ii) 部分的切線都不包括在內。

STEP 之外

關於 $f(\pm1)$ 和頂點的條件，其實是一個一般問題的小特例：多項式（polynomial）的所有根何時都落在某個指定區域之內？對於單位圓盤（unit disc），答案由 Schur–Cohn 判別

法（Schur–Cohn test）給出。對於左半平面（left half-plane），答案則是 Routh–Hurwitz 判據（Routh–Hurwitz criterion），控制工程師用它來判斷一個系統是否穩定。第 (ii) 部分的區域，正是遞推關係（recurrence）$u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$ 在特徵根（characteristic root）為實數時的穩定區域。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一書中有更多同類的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。