詳細解答

STEP III 2001，第 2 題

純數學 • 雙曲代換與面積

> **STEP III 2001，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q2

關鍵思路

兩個不等式說的都是「留在某條等軸型雙曲線（rectangular-type hyperbola）的其中一側」，所以第一步是畫出這兩條雙曲線的草圖，並找出它們的交點。結果發現，所求區域是一塊有界、具四重對稱性的範圍，而它的面積可寫成兩個形如 $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ 的積分。這類積分正好可用雙曲代換（hyperbolic substitution）來處理，而題目的第一部分，就是為了讓我們把所得的 $\cosh^{-1}$（以及 $\sinh^{-1}$）的值化為對數。

解答

$\cosh^{-1} x$ 的對數形式

設 $x \geq 1$，並設 $y = \cosh^{-1} x$；按定義，它是滿足 $\cosh y = x$ 的 非負數。於是

$$x = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} + 1 = 0,$$

這是一條以 e^{y} 為未知數的二次方程（quadratic），所以

$$\mathrm{e}^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **想一想** 應該取哪一個符號？為甚麼？

兩個根的積是 1（即二次方程的常數項），而取正號的根至少是 1。因此取負號的根至多是 1，這會得出 $y \leq 0$。由於 $y \geq 0$，我們必須取正號（當 $x = 1$ 時，兩個根本來就相等），所以

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

這正是所要證明的結果。以 $x = \sinh y$ 作完全相同的論證，可得 $\mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$；這次兩個根的積是 -1，所以只有取正號的根是正數，於是 $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$。這兩條公式稍後都會用到。

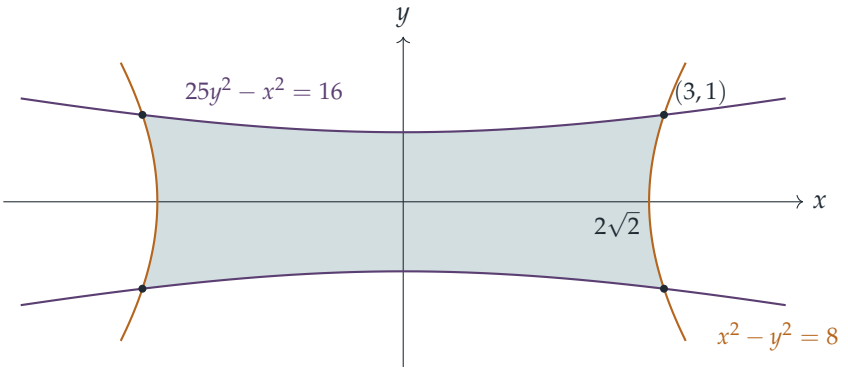
區域

把兩個不等式改寫為

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad 及 \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

曲線 $x^2 - y^2 = 8$ 是一條雙曲線，兩支分別向左、向右開口，並通過 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$；第一個不等式要求我們留在它的兩支之間，即 $|x| \le \sqrt{y^2+8}$。曲線 $25y^2 - x^2 = 16$ 是一條雙曲線，兩支分別向上、向下開口，並通過 $(0, \pm\frac{4}{5})$；第二個不等式要求我們留在這兩支之間，即 $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$。

兩條曲線相交之處滿足 $x^2 = y^2 + 8$ 及 $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$，所以 $y^2 = 1$ 及 $x^2 = 9$：交點就是 $(\pm 3, \pm 1)$ 這四點。



這個區域（圖中陰影部分）是有界的：若 (x, y) 在區域內，則 $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2+16) + 8$，所以 $x^2 \le 9$，繼而 $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$。兩個不等式在 $x \mapsto -x$ 及 $y \mapsto -y$ 之下都保持不變，所以區域對兩條坐標軸都對稱，其面積是第一象限（first quadrant）內那部分的面積 A 的四倍。

在第一象限內，我們沿垂直方向切割。

- 當 $0 \le x \le 2\sqrt{2}$ 時，我們有 $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$，所以第一個不等式自動成立，而 y 由 0 上升至 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$。
- 當 $2\sqrt{2} \le x \le 3$ 時，y 由 $\sqrt{x^2-8}$ 上升至 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$（而根據交點的計算，下方的曲線位於上方的曲線之下，當且僅當 $x^2 \le 9$）。

因此

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

第一個積分

代入 $x = 4\sinh s$，於是 $\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$ 及 $\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$（是正數，因為 $\cosh s > 0$）。積分上下限是 $s = 0$ 及 $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$。利用 $\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$，

$$I_1 = \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[8\sinh s\cosh s + 8s\Big]_0^S$$
$$= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2,$$

因為 $\sinh S = \frac{3}{4}$ 及 $\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$。

第二個積分

代入 $x = 2\sqrt{2}\cosh t$，其中 $t \geq 0$，於是 $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$ 及 $\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$（是正數，因為 $t \geq 0$）。積分上下限是 $t = 0$ 及

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

這是由第一部分得出的。利用 $\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$，

$$I_2 = \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[4\sinh t\cosh t - 4t\Big]_0^T$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2,$$

因為 $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ 及 $\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$。

綜合結果

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

代數部分剛好完全抵銷，而總面積是

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$。對兩個積分使用森遜法則（Simpson's rule），得出 $I_1 \approx 13.0452$ 及 $I_2 \approx 0.11371$，與 $\frac{15}{2} + 8\ln 2$ 及 $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ 吻合；另外，直接在一個細密的網格上數算同時滿足兩個不等式的點，得出的面積約為 9.98。

- 檢查大小是否合理：這個區域可放進矩形 $[-3,3]\times[-1,1]$ 之內，該矩形的面積是 12，而區域只是欠缺了矩形四角幾塊細長的小片，所以面積略小於 10 是相當合理的。
- $\cosh^{-1}1=\ln 1=0$，與應有的結果一致。

常見錯誤

- 把不等式理解為雙曲線「之外」：$y^2\geq x^2-8$ 是 $x^2-y^2=8$ 兩支之*間*的區域，當中包含 y-軸。
- 忘記第一個不等式只在 $x>2\sqrt{2}$ 時才起作用，因而減去 $\int_0^3\sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$，而這個積分甚至不是實數。
- 在 $\mathrm{e}^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$ 中取負號，這樣得出的是 $-\cosh^{-1}x$。

STEP 之外

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ 這兩類積分可用雙曲代換處理，道理與 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 可用 $x=a\sin\theta$ 處理一樣：恆等式 $\cosh^2-\sinh^2=1$ 能消去平方根。事實上，雙曲函數（hyperbolic functions）量度的是*面積*：$(\cosh t,\sinh t)$ 中的參數 t 是單位雙曲線上扇形面積的兩倍，正如 θ 是圓扇形面積的兩倍。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）還有很多這類風格的題目，而 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析導論）則說明指數函數、對數函數以至雙曲函數，如何建立在嚴格的基礎之上。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。