詳細解答

STEP III 2001，第 13 題

概率與統計 • 硬幣序列遊戲

> **STEP III 2001，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 12.8 節 *Penney* 遊戲中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/penney.html

關鍵思路

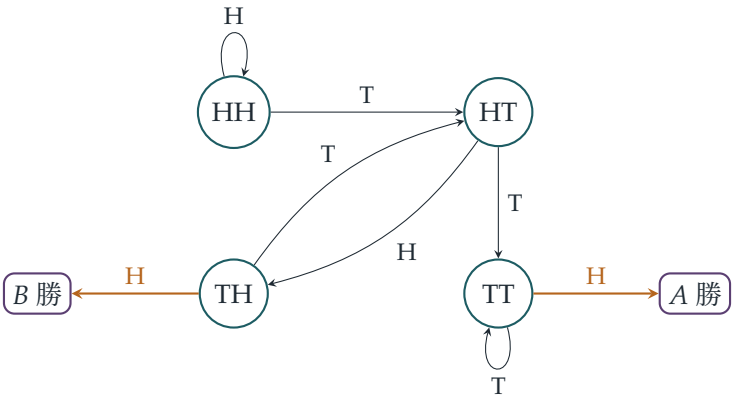
兩個目標序列的長度都是三，所以沒有人能在第三次擲幣之前獲勝；而從那時起，對往後有影響的就只有最後兩次擲幣的結果。這樣便只有四個「狀態」（state）（HH、HT、TH、TT），而以下一次擲幣的結果作條件（conditioning），就可把這個遊戲化為一個關於各狀態下獲勝概率的小型線性方程組。第 (ii) 和第 (iii) 部分也可以用同樣的方法處理，不過在四場遊戲之中，有兩場用簡短的直接論證會更快。

解答

在整個解答中，各次擲幣互相獨立（independent），每次出現 H 或 T 的概率均為 $\frac{1}{2}$。只要已經擲了最少兩次而仍未有人獲勝，下一次擲幣連同最後兩次的結果，就決定了此刻是否有人獲勝；若沒有，也決定了新的最後兩次結果。更早的擲幣結果並不相干，因為每個目標序列只有三個字母長。所以，從某一刻起獲勝的概率只取決於最後兩次擲幣的結果，而且與把這兩次當作一場新遊戲的頭兩次擲幣時的概率相同。

第 (i) 部分

設 p_{XY} 為已知頭兩次擲幣結果是 XY 時，A（TTH）擊敗 B（THH）的概率。下圖顯示下一次擲幣如何使我們在各狀態之間轉移。



爲何 $p_{\mathrm{TT}} = 1$。假設最後兩次擲幣的結果是 TT。正面終會出現的概率為 1（連續出現 n 次反面的機會是 $2^{-n} \to 0$）。在正面出現之前，擲出的全是反面，所以 THH 不可能出現；而第一個正面之前最少有兩個反面，所以它完成了 TTH。因此 A 必定獲勝：$p_{\mathrm{TT}} = 1$。

爲何 $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}$。在 HT 之後，HTH 和 HTT 都不是目標序列，所以沒有人會在第三次擲幣時獲勝。若第三次是 H（概率為 $\frac{1}{2}$），最後兩次的結果便是 TH；若是 T，則是 TT。以第三次擲幣的結果作條件，並運用上文「只有最後兩次擲幣才有影響」這一點，

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}.$$

其餘兩個狀態。在 TH 之後，擲出正面便得 THH，B 獲勝；擲出反面則變成 HT。在 HH 之後，擲出正面仍是 HH，擲出反面則變成 HT（而 HHH、HHT 在這裏都不是目標序列）。所以

$$p_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}, \qquad p_{\mathrm{HH}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}.$$

由第二條方程得 $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}}$。把 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ 和 $p_{\mathrm{TT}} = 1$ 代入 p_{HT} 的方程，

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{4}p_{\mathrm{HT}} + \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{4}p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{2}{3}.$$

因此 $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}} = \frac{2}{3}$，而 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$，正如題目所求。

想一想 假如 TH 其實是在第 5 和第 6 次擲幣時出現的，為何可以把遊戲從 TH「重新開始」，當作 TH 就是頭兩次擲幣的結果？

因為遊戲往後的發展只取決於往後的擲幣結果和最後兩次擲幣的結果：任何尚未完成的 TTH 或 THH，最多只能用到已擲出的最後兩次結果。更早的歷史對兩個序列都沒有幫助，而往後的擲幣結果亦與它獨立。

整體概率。沒有人能在頭兩次擲幣內獲勝，而四種可能的組合各有 $\frac{1}{4}$ 的概率。根據全概率定理（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \text{ 勝}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

第 (ii) 部分

現在 B 的序列是 THH，C 的是 HHT。這裏用直接論證最為簡潔。

若頭兩次擲幣的結果是 HH，則 C 獲勝：其後出現的第一個反面（它出現的概率為 1）之前是 HH，於是完成了 HHT；而在它之前每次擲出的都是正面，所以 THH 不可能出現過。

否則頭兩次擲幣之中有一個反面。HH 這個模式終會出現的概率為 1。考慮它第一次出現的位置。它並非由第 1 次擲幣開始，所以緊接在它之前的一次擲幣是存在的，而且結果不是 H（否則便有一個更早的 HH），所以是 T。於是第一個 HH 完成了一個 THH。同時，HHT 不可能在此之前出現，因為它需要一個更早的 HH。所以 B 獲勝。

因此，除非頭兩次擲幣的結果是 HH，否則 B 獲勝：

$$\mathrm{P}(B \text{ 勝}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

第 (iii) 部分

C（HHT）對 D（HTT）。設 q_{XY} 為最後兩次擲幣結果是 XY 時 C 獲勝的概率。由 HH 出發，C 必定獲勝，理由與 (ii) 相同：第一個反面完成了 HHT，而 HTT 需要在 HT 之後再有一個反面，這不可能先出現。所以 $q_{\mathrm{HH}} = 1$。在其餘各狀態下以下一次擲幣的結果作條件：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{HT}\text{：}\quad \text{T 得 HTT（}D\text{ 勝），H 得 TH：} && q_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TH}},\\
&\mathrm{TH}\text{：}\quad \text{H 得 HH，T 得 HT：} && q_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{HT}},\\
&\mathrm{TT}\text{：}\quad \text{H 得 TH，T 得 TT：} && q_{\mathrm{TT}} = \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TT}}.
\end{aligned}$$

由最後一條得 $q_{\mathrm{TT}} = q_{\mathrm{TH}}$。把第一條代入第二條，得 $q_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q_{\mathrm{TH}}$，所以 $q_{\mathrm{TH}} = \frac{2}{3}$、$q_{\mathrm{TT}} = \frac{2}{3}$ 及 $q_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{3}$。因此

$$\mathrm{P}(C \text{ 勝}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2},$$

所以 C 比 D 更有可能獲勝。

D（HTT）對 A（TTH）。這與第 (ii) 部分互為鏡像，只是 H 和 T 對調了。若頭兩次擲幣的結果是 TT，則 A 獲勝：第一個正面完成了 TTH，而 HTT 需要一個正面之後接兩個反面，這不可能在那第一個正面之前發生。否則頭兩次擲幣之中有一個正面。TT 這個模式終會出現的概率為 1；它第一次出現時並非由第 1 次擲幣開始，而它之前的一次擲幣不可能是 T（否則便有一個更早的 TT），所以是 H，於是第一個 TT 完成了 HTT。TTH 不可能在更早時出現，因為它需要一個更早的 TT。所以 D 獲勝，而

$$\mathrm{P}(D \text{ 勝}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}.$$

所以 D 比 A 更有可能獲勝。

想一想 A 勝 B，B 勝 C，C 勝 D，而 D 又勝 A。這怎麼可能？

「較有可能擊敗」並不是一個傳遞關係（transitive relation），所以並無矛盾：四位玩家形成一個循環，A、B、C、D 在各自的對局中獲勝的概率分別是 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$。後選的一方總可以挑一個能擊敗先選者的序列。

驗算

- 在第 (i) 部分，代回驗證：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}=p_{\mathrm{HT}}$，以及 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=p_{\mathrm{TH}}$。
- 狀態法同樣適用於第 (ii) 部分和 D–A 這場遊戲：在 B 對 C 的遊戲中，由 HH、HT、TH、TT 出發時 B 獲勝的概率分別是 $0, 1, 1, 1$，平均值為 $\frac{3}{4}$。
- 為每組對局模擬 200 000 場遊戲，所得的獲勝頻率為 0.664、0.752、0.666 和 0.749，而精確值是 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$。

常見錯誤

- 忘記遊戲可以在第三次擲幣時結束，例如寫成 $p_{\mathrm{TH}}=\frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}}+\frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$，而沒有留意到 TH 之後擲出 H 就是 B 即時獲勝。
- 把四個狀態的概率取平均，卻沒有說明頭兩次擲幣的每種組合概率均為 $\frac{1}{4}$，以及沒有人能在第三次擲幣之前獲勝。

STEP 之外

這就是 Penney 遊戲（Penney's game），是非傳遞概率（non-transitive probabilities）的著名例子。狀態法其實就是吸收馬可夫鏈（absorbing Markov chains）的理論，當中的吸收概率所滿足的，正是這裏所解的那類線性方程。任意兩個序列之間的勝負比（odds）甚至有一條閉合公式，即康威（Conway）的「領先數」（leading numbers）演算法，可以用鞅（martingales）來證明。關於馬可夫鏈和首步分析（first-step analysis），可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*，或 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。