詳細解答

STEP III 2001，第 11 題

力學 • 轉動能量守恆

> **STEP III 2001，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q11

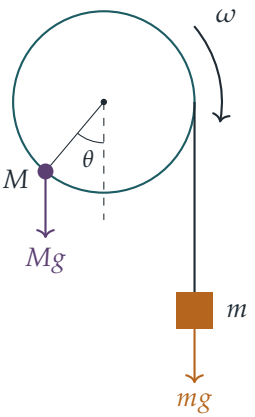
關鍵思路

整個系統都是光滑的（輪軸無摩擦，繩子是輕繩），所以機械能守恆（conservation of mechanical energy），只需一條能量方程便可把 ω 表示成 θ 的函數，完全不必考慮張力或其他力。圓柱體恰好在 ω^2 降至零時停下。於是第二部分變成關於單一個 θ 的函數的問題：懸掛質量所失去的勢能（potential energy），必須始終大於質點所增加的勢能。整理之後，這就是比較 m/M 與 $(1-\cos\theta)/\theta$ 的最大值，而求這個最大值並不困難。

解答

角速度

我們把 m 和 M 視為質點（particle），繩子視為不可伸長的輕繩（light and inextensible），且不在圓柱體上打滑，輪軸則視為光滑。設圓柱體沿着令 m 下降的方向轉過角度 θ，並設 $\omega = \dot{\theta}$。



當圓柱體轉過 θ 時，有長度為 $a\theta$ 的繩子鬆開，所以 m 下降了 $a\theta$，並以速率 $a\omega$ 運動。質點 M 位於圓柱體的邊緣，所以它的速率也是 $a\omega$；它起初位於軸線下方深度 a 處，現在位於深度 $a\cos\theta$ 處，所以它上升了 $a(1-\cos\theta)$。

動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2+\tfrac{1}{2}M(a\omega)^2+\tfrac{1}{2}m(a\omega)^2=\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2.$$

光滑的輪軸不作功，而繩子既輕且不可伸長，傳遞能量時並無損耗。所以動能的增加等於勢能的淨減少：

$$\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2=mga\theta-Mga(1-\cos\theta),$$

由此得

$$\boxed{\omega^2=\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}\qquad\text{及}\qquad\omega=\sqrt{\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}.$$

建模上有一點值得驗證：繩子必須保持拉緊。把能量方程對時間求導，得 $\big(I+(M+m)a^2\big)\ddot\theta=ga(m-M\sin\theta)$，而張力（tension）為 $T=m(g-a\ddot\theta)$。現在 $a\ddot\theta<g$ 等價於 $a^2(m-M\sin\theta)<I+(M+m)a^2$，即 $-Ma^2\sin\theta<I+Ma^2$，而這恆成立。所以在整個運動過程中 $T>0$，能量方程對所有 θ 都有效。

永不停下

開始時，$\ddot\theta=gam/(I+(M+m)a^2)>0$，所以圓柱體確實沿我們所選的方向開始轉動。由於 ω 連續，它只有經過零才能改變正負號，所以只要對每個 $\theta>0$ 都有 $\omega^2>0$，圓柱體便會永遠轉動下去。設 $k=m/M$，由 ω^2 的表達式可見，這種情況恰好在以下條件成立時出現：

$$k\theta>1-\cos\theta\quad\text{對所有}\theta>0,\qquad\text{即}\qquad k>h(\theta)=\frac{1-\cos\theta}{\theta}\quad\text{對所有}\theta>0.$$

所以我們需要求出 h 在 $\theta > 0$ 上的最大值。

駐點（stationary points）。我們有

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$，

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

在 $0 < \theta < \pi$ 上，$\sin\frac{1}{2}\theta$ 和 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 皆為正，所以 $h'(\theta)$ 的正負號與 $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$ 相同。設 $u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$。那麼 $u(0) = 0$，$u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$ 在 0 附近為負，而 $u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$，所以 u 在 $[0,\pi)$ 上是凸函數（convex function）。它先降至零以下，然後當 $\theta \to \pi$ 時趨向 $+\infty$。凸函數最多只能穿過零兩次，所以 u 在 $(0,\pi)$ 內恰好有一個零點，那就是 α。因此 h 在 $(0,\alpha)$ 上遞增，在 (α,π) 上遞減。

> ? **想一想** h 在最大值處的值是多少？對於更大的 θ 又如何？

在 $\theta = \alpha$ 處，h' 的分子為零，所以 $1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$，因此

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

對於 $\pi \le \theta \le 2\pi$，我們有 $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$ 和 $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$，所以 $\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$，從而 $h' \le 0$：h 一直遞減至 2π，所以在 $(\alpha, 2\pi]$ 上 $h < \sin\alpha$。對於 $\theta > 2\pi$，$h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$。最後，$u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$ 而 $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$，所以 $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$，由此得 $\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$。所以 $\sin\alpha$ 是 h 在 $\theta > 0$ 上的最大值，而且只在 $\theta = \alpha$ 處取得。

結論。若 $m/M > \sin\alpha$，則對每個 $\theta > 0$，

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

所以對所有 $\theta > 0$ 都有 $\omega^2 > 0$，圓柱體會一直轉動而不會停下，這正是所要證明的。

（反過來說，若 $m/M < \sin\alpha$，則在 $\theta = \alpha$ 處 $\omega^2 < 0$，所以 ω 在此之前已降至零，圓柱體會停下並往回擺動。在臨界情況 $m/M = \sin\alpha$ 下，系統會緩緩趨近平衡位置 $\theta = \alpha$，卻永遠不會真正到達。）

驗算

- 當 $M = 0$ 時，公式給出 $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$，這是質量從滑輪上鬆開繩子下降的標準結果：$\omega^2$ 線性增長，與恆定角加速度的情況一致。

- 用二分法（bisection）解 $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$，得 $\alpha \approx 2.3311$（約 133.6°）和 $\sin\alpha \approx 0.7246$；在 $0 < \theta < 100$ 上對 $(1-\cos\theta)/\theta$ 作數值搜尋，得出相同的最大值 0.7246。
- 對隨機選取的 I, a, M, m 以數值方法逐步求解運動方程，結果與 ω^2 的公式吻合；而且當 $m/M = 0.735$ 時圓柱體永不停下，當 $m/M = 0.715$ 時則會停下。

常見錯誤

- 遺漏 M 或 m 的動能：兩者都以速率 $a\omega$ 運動，所以有效轉動慣量（moment of inertia）是 $I + (M+m)a^2$。
- 弄錯 M 的高度：它上升了 $a(1-\cos\theta)$，而不是 $a\sin\theta$。
- 只證明 h 在 α 處有局部極大值，卻沒有檢查對所有更大的 θ，h 的值都較小。

STEP 之外

這是在勢場中的單自由度（one degree of freedom）運動：$\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$，其中 $V(\theta) = Mga(1-\cos\theta) - mga\theta$，是一個傾斜的「洗衣板」勢（washboard potential）。從靜止開始，運動會一去不返，當且僅當對每個 $\theta > 0$，V 都保持低於其初始值；同樣的圖像也可描述物理學中的受驅擺（driven pendulum）和約瑟夫森結（Josephson junction）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）有討論這類能量圖。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。