詳細解答

STEP III 2001，第 10 題

力學 • 相對速度

> **STEP III 2001，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

關鍵思路

相對速度（relative velocity）就是兩個速度之差：A 相對於 C 的速度是 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$。只要把兩個條件都寫成點積（dot product），一切便可從中點 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ 量起，而兩個條件就化為平方差的形式。從幾何角度看，這兩條方程描述的是一個圓和一條直線，這正是「兩個速度」這個數目的來由。

解答

兩個條件

我們把船隻視為在海面這個水平面上運動的質點（particle），因此所有速度都是二維向量。A 和 B 相對於 C 的速度分別是

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

大小（magnitude）相等和互相垂直（perpendicular）即是

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad 及 \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

兩條方程

設

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

於是 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$ 及 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$，所以

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

現在利用 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot\mathbf{w}$，把兩個條件逐一展開：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{d}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{d}\cdot\mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{d}\cdot\mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) = -4\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{d}.$$

因此，垂直條件 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ 恰好等價於 $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{d}|^2$，即

$$\left|\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\right|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\right|^2,$$

而大小相等的條件 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$ 恰好等價於 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{d} = 0$，（乘以 2 後）即

$$\Big(\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\Big)\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) = 0.$$

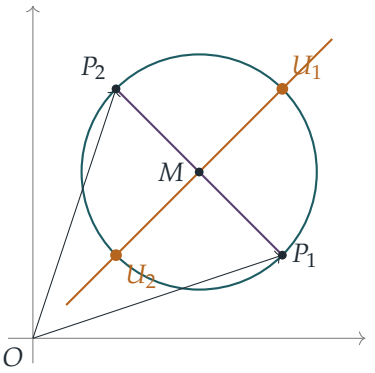
這就是所求的兩條方程。以上每一步都是恆等式（identity），所以論證也可以倒過來走：兩條方程成立，當且僅當兩個條件成立。

為何 C 有兩個可能的速度

把各個速度畫成從同一個原點出發的位置向量（position vector），設 P_1、P_2、U 分別為 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{u}$ 的終點，並設 M 為 P_1P_2 的中點。

> ? **想一想** 每條方程分別說明點 U 可以在甚麼位置？

第一條方程說明 U 與 M 的距離是 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|$：它位於以 P_1P_2 為直徑的圓上。第二條方程說明 MU 垂直於 P_1P_2（或 $U = M$）：U 位於 P_1P_2 的垂直平分線（perpendicular bisector）上。



在平面上，一條通過圓心的直線與一個半徑為正數的圓恰好相交於兩點，這兩點位於一條直徑的兩端。這裏的半徑是 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|$，它是正數，正正因為 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$。所以 C 恰好有兩個可能的速度：

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) \pm \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

其中 $\mathbf{d}^{\perp}$ 是把 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ 旋轉一個直角所得的向量。（若 $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$，圓便收縮成單獨一點 M，這時兩個相對速度都是零，兩個條件就沒有甚麼實質內容。）在圖中，直角 P_1UP_2 就是半圓上的圓周角，而 $UP_1=UP_2$ 是因為 U 在垂直平分線上。

最後一部分

現在 $|\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|=k$ 且 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$，其中 $k>0$（只有非零向量才談得上垂直）。於是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 互相垂直而且非零，所以它們張成（span）整個平面，我們可以寫 $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2$。

利用 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$ 和 $|\mathbf{v}_1|^2=|\mathbf{v}_2|^2$，第二條方程給出

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2-|\mathbf{v}_2|^2\right)=0,\qquad\text{所以}\qquad\alpha k^2-\beta k^2=0,$$

因此 $\beta=\alpha$。至於第一條方程，把它展開：

$$|\mathbf{u}|^2-\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^2.$$

由於 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$，$|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2|^2$ 和 $|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^2$ 都等於 $2k^2$，所以這兩項互相抵消，得 $|\mathbf{u}|^2=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$。代入 $\mathbf{u}=\alpha(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$，這就是

$$2\alpha^2k^2=2\alpha k^2\quad\Longrightarrow\quad\alpha(\alpha-1)=0.$$

所以 $\alpha=0$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$；或 $\alpha=1$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$。因此若 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$，則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，正如所求。

這在物理上也合情合理。若 C 靜止，相對速度就是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 本身，它們本來就滿足兩個條件。若 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，相對速度是 $-\mathbf{v}_2$ 和 $-\mathbf{v}_1$，它們同樣長度相等而且互相垂直。

驗算

取 $\mathbf{v}_1=(3,1)$，$\mathbf{v}_2=(1,3)$，與圖中相同。公式給出 $\mathbf{u}=(2,2)\pm(1,1)$，即 $(3,3)$ 或 $(1,1)$。當 $\mathbf{u}=(3,3)$ 時，相對速度是 $(0,-2)$ 和 $(-2,0)$；當取 $(1,1)$ 時，相對速度是 $(2,0)$ 和 $(0,2)$。兩對向量都長度相等而且互相垂直。用電腦測試 10^4 對隨機的 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$，結果確認了兩個恆等式和兩個解；另外對 10^3 對隨機的等長垂直向量，電腦求得的解恰好是 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$。

常見錯誤

- 把 A 相對於 C 的速度寫成 $\mathbf{u}-\mathbf{v}_1$。正負號不影響本題的兩個條件，但在大部分相對速度的題目中卻至關重要。
- 忘記說明為何恰好有兩個速度。這個數目取決於我們是在平面上討論（在三維空間中，所有解構成一整個圓），也取決於半徑不為零。

STEP 之外

由 $\mathbf{u}$ 轉到 $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$，其實是轉換參考系（reference frame）；而所有速度都平移同一個向量時相對速度不變，這個事實就是伽利略不變性（Galilean invariance），它是經典力學（classical mechanics）的起點。這裏所用的「速度圖」，即把速度畫成點的做法，也能把碰撞和追逐問題化為幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對相對運動和參考系有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。