詳細解答

STEP III 2001，第 1 題

純數學 • 麥克勞林級數

> **STEP III 2001，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q1

關鍵思路

函數 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 就是 $\sinh^{-1} x$，而它的一階導數（derivative）遠比函數本身簡單。把這個導數平方，便得到一個不含平方根的關係式 $(x^2+1)(y')^2 = 1$，再對它求導，就得到遞推關係（recurrence）中 $n = 0$ 的情況。每多求導一次，遞推關係便上移一步，這正是歸納法（induction）所需要的。在 $x = 0$ 處，含 x 的一項消失，遞推關係把 $y^{(n+2)}(0)$ 直接與 $y^{(n)}(0)$ 連繫起來，於是所有麥克勞林（Maclaurin）係數幾乎唾手可得。

解答

導數

設 $s = \sqrt{x^2+1}$，則 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$。留意對任意實數 x 都有 $x + s > 0$，因為 $s > \sqrt{x^2} = |x|$，所以這個對數處處有定義。由鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

正如所求。

歸納法

設 $P(n)$ 為以下命題：

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{對所有實數} x.$$

基礎情況，$n = 0$。我們需要證明 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$。由第一部分，$(x^2+1)(y')^2 =$

1。對 x 求導，

$$2x(y')^2 + (x^2+1)\cdot 2y'y'' = 0.$$

由於 $y' = 1/\sqrt{x^2+1}$ 永不為零，我們可以除以 $2y'$，得到 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$。這就是 $P(0)$。（另一做法是直接對 $y' = (x^2+1)^{-1/2}$ 求導：$y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$，所以 $(x^2+1)y'' = -x(x^2+1)^{-1/2} = -xy'$。）

歸納步驟。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 0$ 成立：

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+1)} + k^2\,y^{(k)} = 0.$$

此式對所有 x 都成立，所以我們可以對它求導。對首兩項運用積法則（product rule），

$$2x\,y^{(k+2)} + (x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+1)\,y^{(k+1)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+2)} + k^2\,y^{(k+1)} = 0.$$

合併同類項：

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+3)\,x\,y^{(k+2)} + (k^2+2k+1)\,y^{(k+1)} = 0,$$

而由於 $2k+3 = 2(k+1)+1$ 及 $k^2+2k+1 = (k+1)^2$，這正正就是 $P(k+1)$。

想一想 為甚麼 $y^{(k+2)}$ 的係數剛好增加 2？

對第一項中的 (x^2+1) 求導，會多出一個 $2x\,y^{(k+2)}$，它與第二項的 $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$ 合併。同樣地，對第二項中的 x 求導所得的 $(2k+1)$ 與 k^2 合併，而 k^2+2k+1 是一個完全平方（perfect square）。這個遞推關係天生就會複製自己。

由於 $P(0)$ 成立，且對每個 $k \geq 0$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 0$ 成立。

麥克勞林級數

在 $P(n)$ 中代入 $x = 0$。中間一項消失，剩下

$$y^{(n+2)}(0) = -n^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

我們需要兩個初始值：$y(0) = \ln(0+1) = 0$ 和 $y'(0) = 1/\sqrt{1} = 1$。

偶數階導數。由 $y(0) = 0$，遞推關係給出 $y''(0) = 0$，繼而 $y^{(4)}(0) = 0$，如此類推：每個偶數階導數在 0 處都等於零。（這亦可由 y 是奇函數（odd function）推出：$y(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$，因為 $(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = 1$。）

奇數階導數。由 $y'(0) = 1$ 出發，

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -1^2 \cdot y'(0) = -1, \\ y^{(5)}(0) &= -3^2 \cdot y'''(0) = 9, \\ y^{(7)}(0) &= -5^2 \cdot y^{(5)}(0) = -225. \end{aligned}$$

想一想 要由 $y'''(0)$ 得到 $y^{(5)}(0)$，n 應取甚麼值？

要得到 $n+2=5$ 的 $y^{(n+2)}$，我們需要 $n=3$，所以因子是 $-3^2=-9$，而不是 -5^2。這個因子用的是較低階導數的階數。

因此麥克勞林級數（Maclaurin series）$y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$ 為

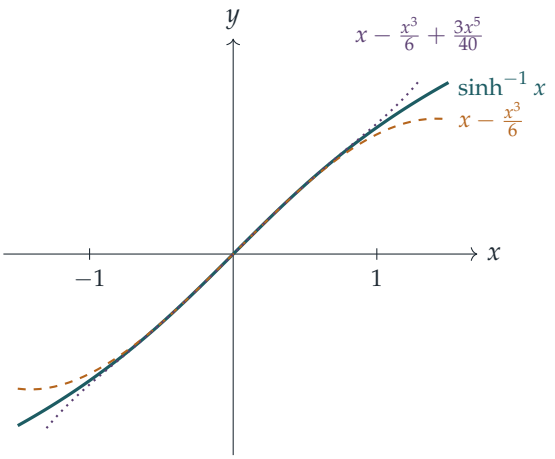
$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

其開首各項與題目所求相符，而下一個非零項是

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

另一途徑。把二項式級數（binomial series）$(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$ 逐項積分（對 $|x|<1$ 成立），並利用 $y(0)=0$，便得到 $x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$，結果一致。

下圖顯示部分和（partial sums）在原點附近如何緊貼 $y=\sinh^{-1}x$，而在較遠處則交替地偏高和偏低。



驗算

▶ 當 $x=0.1$ 時，$\ln\left(0.1+\sqrt{1.01}\right)=0.0998340789$，而 $x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}=0.0998340789$ 亦然；兩者之差約為 3×10^{-11}，即下一項（x^9 項）的大小。

- $n = 0$ 的情況很容易在 $x = 1$ 處檢驗：$y' = 1/\sqrt{2}$ 而 $y'' = -1/(2\sqrt{2})$，所以 $2y'' + y' = 0$。
- 在 0 處的奇數階導數為 $1, -1, 9, -225$，即 $(-1)^m\big(1 \cdot 3 \cdots (2m-1)\big)^2$：這是一個賞心悅目、值得留意的規律。

常見錯誤

- 在 $y^{(n+2)}(0) = -n^2 y^{(n)}(0)$ 中用錯了 n，得出因子 $-9, -25, -49$，而不是 $-1, -9, -25$。
- 忘記除以 $k!$：x^7 的係數是 $-225/5040$，而不是 -225。
- 在歸納步驟中，漏掉了對 $x^2 + 1$ 求導所產生的 $2x\,y^{(k+2)}$。

STEP 之外

泰勒級數（Taylor series）只在它收斂（converge）的地方才有用，而這個級數恰好在 $|x| \leq 1$ 時收斂，儘管 $\sinh^{-1} x$ 在整條實數線上都十分光滑。箇中原因藏在複平面（complex plane）上：$1/\sqrt{1+z^2}$ 在 $z = \pm\mathrm{i}$ 處趨於無窮，這兩點與原點的距離為 1，而這個距離就是收斂半徑（radius of convergence）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（視覺化複分析）對此有精彩的解釋；至於泰勒定理（Taylor's theorem）及其餘項在實變數方面的論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（理解分析學）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。