詳細解答

STEP II 2001，第 9 題

力學 • 二次空氣阻力

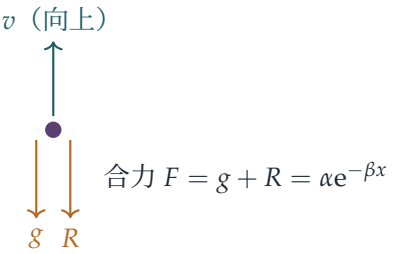
> **STEP II 2001，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q9

關鍵思路

題目給出的力是高度的函數，而不是時間的函數，所以最自然的工具是功能原理（work–energy principle）：質點在上升過程中克服 F 所作的功，恰好等於它損失的動能（kinetic energy）。這樣就把 $\mathrm{e}^{-\beta x}$ 與 v^2 聯繫起來，而所得結果顯示空氣阻力（air resistance）只取決於速率。一旦知道阻力與速率的關係，下落的過程就是一條關於 v^2 的標準微分方程（differential equation）。

解答

模型。 質點的質量為一個單位，沿一條鉛垂線運動。上升時，重力和空氣阻力都向下作用，與運動方向相反，所以合力 F（大小為 $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$）向下作用。取 x 為由拋射點起向上量度的高度。



所耗的能量

到達高度 x 時所耗的能量，就是克服 F 所作的功：

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big).$$

這些能量來自質點的動能，所以根據功能原理（單位質量）

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big). \qquad (*)$$

（等價地，把牛頓第二定律（Newton's second law）寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ 的形式，再由 $x=0$、$v=u$ 起積分，也會得到同一條方程。）

以速率表示的力

把 $(*)$ 乘以 β 並整理：

$$\alpha - \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

這正是所要求的結果。

想一想 為甚麼必定有 $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$？題目中似乎沒有任何條件迫使它成立。

把 F 分成兩部分：$F = g + R$，其中 R 是空氣阻力。於是

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \Big(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\Big).$$

所以阻力只是速率的函數：一個 v^2 項加上一個常數。空氣阻力是由物體在空氣中運動而產生的，所以當質點在最高點瞬間靜止時，阻力必定為零。在該處代入 $v=0$，得 $R=0$，所以 $F=g$（只有重力作用），而且

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{即} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

因此常數項為零，阻力定律就簡單地是

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

（順帶一提，最高點就是 $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = g$ 之處，高度為 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$。）

下落的過程

假設無論運動方向如何，同一條阻力定律 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$ 都成立；下落時阻力向上作用，與運動方向相反，而重力仍然向下作用。設 y 為質點在最高點以下的距離，v 為向下的速率，並且在 $y=0$ 時 $v=0$。取向下為正，由牛頓第二定律（單位質量）得：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

由於 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$，設 $w = v^2$：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w = 0\text{，當}y = 0.$$

這是一條常係數線性方程（也可以用分離變數法）：其解為

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

它確實滿足 $w(0) = 0$ 和 $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g - \beta w$。因此，在最高點以下距離 y 處的空氣阻力為

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

驗算

當 $y \to \infty$ 時，$R \to g$：質點趨近終端速率（terminal speed）$\sqrt{2g/\beta}$，此時阻力與重力平衡。在 $y = 0$ 處，$R = 0$，與質點靜止時應有的情況相符。上升時，在 $x = 0$ 處公式給出 $F = \alpha = g + \frac{1}{2}\beta u^2$，即重力加上速率為 u 時的阻力。數值上，取 $g = 9.8$、$\beta = 0.1$、$u = 20$（所以 $\alpha = 29.8$），用龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）逐步計算運動方程，所得結果與上升時的 $F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ 和下落時的 $R = g(1 - \mathrm{e}^{-\beta y})$ 相符，誤差約為 10^{-12}，而質點到達的最高高度 ≈ 11.12，與 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ 吻合。

常見錯誤

- 把 F 當作只是空氣阻力：它是合力，所以必須減去重力才得到 R。
- 下落時仍然沿用相同的阻力符號：阻力總是與運動方向相反，所以此時它向上作用，方程變為 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \frac{1}{2}\beta v^2$。
- 以 v 表示答案，或以 u 和 α 表示答案；題目要求只以 y、g 和 β 表示 R。

STEP 之外

二次阻力（quadratic drag）$R \propto v^2$ 是描述物體在空氣中高速運動的切合實際的模型，而這道題展示了一個巧妙的技巧：以距離為自變數時，v^2 所滿足的方程是線性的，儘管以時間為自變數時 v 所滿足的方程並非線性。大學本科的力學課程還會探討先上升後下落這個問題的不對稱性：質點返回起點時的速率小於 u，而下落所需的時間比上升長。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）詳細討論了取決於速度的力和終端速度。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。