詳細解答

STEP II 2001，第 8 題

純數學 • 周期函數與常微分方程

STEP II 2001，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s2-q8

關鍵思路

周期（period）為 1 的函數，在每一個長度為 1 的區間上的形狀都相同，所以它在任何這樣的區間上的積分都是同一個數。因此 F 每次增加的量都相同，都是 $F(1)$，只要 x 增加 1。最後一部分的微分方程（differential equation）是一階線性的，所以利用積分因子（integrating factor）便可把它的解化為 $-F(x)$ 的指數函數，其餘的結論則由 $F(1)$ 為正數這一事實推出。

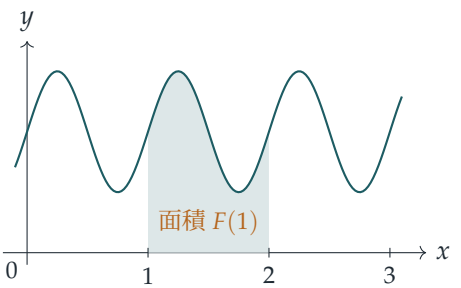
解答

第 (i) 部分

取

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

由於 sin 的周期為 2π，$\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$，所以 $f(x+1) = f(x)$。另外 $\sin(2\pi x) \geq -1$，故對每一個 x 都有 $f(x) \geq 1 > 0$。（常數函數如 $f(x) = 1$ 也符合要求，但沒那麼有趣。）



圖像下方每一條單位闊度的長條，面積都相同；第 (ii) 部分說的就是這回事。

第 (ii) 部分

定義 $G(x) = F(x+1) - F(x)$。求導，並對第一項使用鏈式法則（chain rule），得

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

對所有 x 成立，這是由 f 的周期性得出的。所以 G 是常數，其值為 $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$，因為 $F(0) = 0$。也就是說，

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{對所有} x.$$

現在對 n 使用歸納法（induction）。當 $n = 1$ 時，命題 $F(1) = 1 \cdot F(1)$ 顯然成立。若對某個正整數 k 有 $F(k) = kF(1)$，則在上式中代入 $x = k$，得

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

因此對每一個正整數 n 都有 $F(n) = nF(1)$，命題得證。

（等價的做法是：若 f 連續，則 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，而 $F(n)$ 是 n 個在 $[k, k+1]$ 上的積分之和，每一個積分經代換（substitution）$t \mapsto t + k$ 後都等於 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$。上面的論證則完全不必把 F 寫成積分。）

第 (iii) 部分

這個方程對 y 而言是線性的，積分因子為 $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$，$F$ 就是在這裏出場的。事實上，由乘積法則（product rule）及 $F' = f$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

所以 $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$ 是常數。在 $x = 0$ 時它等於 $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$，故

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

由第 (ii) 部分，對每一個正整數 n，

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

> ? **想一想** 我們怎樣知道 $F(1) > 0$？題目並沒有直接告訴我們任何關於 $F(1)$ 的資料。

由於對所有 x 都有 $F'(x) = f(x) > 0$，F 是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以 $F(1) > F(0) = 0$。（如果你較喜歡用積分來想：$F(1)$ 是一條正值曲線在 0 與 1 之間下方的面積。）

因此 $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$，而一個滿足 $0 < r < 1$ 的固定數 r 必有 $r^n \to 0$（當 $n \to \infty$ 時）。於是 $y(n) \to 0$（當 $n \to \infty$ 時），這正是我們要證明的。

留意我們只聲稱這個結論沿整數成立。在整數與整數之間，y 被夾住了：由於 F 遞增，y 便遞減，所以事實上 $y(x) \to 0$ 在 $x \to \infty$ 取遍所有實數值時同樣成立。

驗算

取 $f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$，則 $F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$，因為正弦函數在一個完整周期上的積分為零。用辛普森法則（Simpson's rule）計算，$F(2), F(3), F(5), F(7)$ 分別等於 $4, 6, 10, 14$，誤差小於 10^{-12}。以數值方法（四階龍格—庫塔法，Runge–Kutta）逐步求解這個微分方程，由 $y(0) = 1$ 出發，得 $y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$ 及 $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$，與 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$ 吻合。我們亦在非整數的 x 處驗證了 $F(x+1) - F(x) = F(1)$，所用的是對稱性較低的例子 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$。

常見錯誤

- 把 $F(n) = nF(1)$ 當作由周期性「顯然」得出的結論，卻沒有說明為何 $[k, k+1]$ 上的面積等於 $[0,1]$ 上的面積。這裏必須用到函數 $G(x) = F(x+1) - F(x)$ 或代換。
- 忘記說明為何 $F(1) > 0$。沒有這一點，$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ 可能一直停留在 1，甚至趨向無窮大。
- 弄錯積分因子的正負號，最後得出 $y = \mathrm{e}^{F(x)}$，它會增長而不是衰減。

STEP 之外

這是弗洛凱理論（Floquet theory）最簡單的情形：對於係數具周期性的線性微分方程，經過一個周期之後的解，等於初始值乘以一個固定的因子（這裏是 $\mathrm{e}^{-F(1)}$），所以長遠的變化取決於這個因子是小於還是大於 1。同樣的想法，把數換成矩陣，便可解釋支點被上下搖動的單擺的穩定性。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）對線性方程和積分因子有詳盡的講解，很適合作為下一步的讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。