詳細解答

STEP II 2001，第 7 題

純數學 • 複數與旋轉

> **STEP II 2001，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q7

關鍵思路

沿着正多邊形（regular polygon）繞一圈，每條邊的長度都相同，而在每個頂點轉過的都是同一個外角（exterior angle）。在阿根圖（Argand diagram）上，轉過角 θ 相當於乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以每條邊都是前一條邊乘以一個固定的複數（complex number）。一旦求出各頂點，圓心便可由垂直平分線（perpendicular bisector）求得，而旋轉（rotation）只不過是再乘一次 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

解答

求 Q 和 S

每個頂點的內角（interior angle）是 $5\pi/6$，所以在每個頂點，前進方向轉過的是外角 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$。由於多邊形位於上半平面，而我們由 O 出發，沿正實軸走到 P，所以每次都必須向逆時針（anticlockwise）方向轉（若在 P 順時針轉，Q 便會落在實軸之下）。

設 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$。邊 $\overrightarrow{OP}$ 就是複數 2，而其後每條邊都是前一條邊乘以 ω（長度不變，轉過 $\pi/6$）。因此

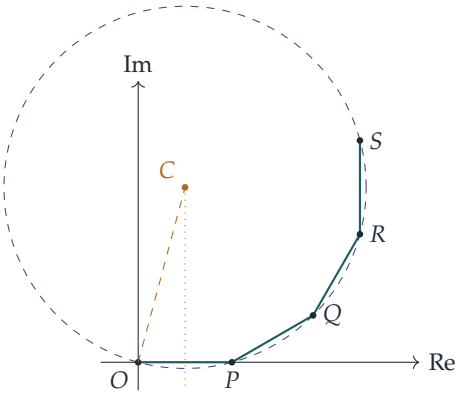
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + \mathrm{i},\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

逐一相加，

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

第一行就是題目要求的 Q 值，而

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$



圓心 C

通過 O、P、Q 的圓就是整個正十二邊形的外接圓（circumcircle），所以 C 是這個多邊形的中心。由於 C 與 O 和 $P = 2$ 等距，它位於垂直平分線 $\operatorname{Re} z = 1$ 上；設 $C = 1 + h\mathrm{i}$。它與 O 和 Q 亦等距：

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

所以 $h = 2 + \sqrt{3}$，而 $C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$，位於第一象限。

想一想 C 的輻角（argument）的準確值是甚麼？

我們需要 $\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$。現在

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

而 C 在第一象限，所以 $\arg C = 5\pi/12$。（從幾何角度看：三角形 OCP 是等腰三角形，在 C 的頂角為 $2\pi/12$，所以兩個底角都是 $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$。）

旋轉

繞 O 逆時針旋轉角 θ，相當於把每一點乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以 C 會移到輻角為 $5\pi/12+\theta$ 的位置。要 C 落在實軸上，$5\pi/12+\theta$ 必須是 π 的倍數；最小的正數 θ 是

$$\theta = \pi - \tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{7\pi}{12},$$

這時 C 落在負實軸上。

現在把 S 寫成模—輻角形式（modulus–argument form）：$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，所以 $S = (3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$。$S$ 的新位置是

$$\begin{aligned} S' = S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12} &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} \\ &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}), \end{aligned}$$

正是所求。

驗算

- $|C|^2 = 1+(2+\sqrt{3})^2 = 8+4\sqrt{3} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$，而 $|C-S|^2 = (2+\sqrt{3})^2+1$ 亦相同，所以 S 確實在同一個圓上。
- $|S'| = 3\sqrt{2}+\sqrt{6} = |S|$，旋轉理應保持模不變。
- 數值上 $S \approx 4.732+4.732\mathrm{i}$，而 $S' \approx -5.7956+3.3461\mathrm{i}$；電腦驗證了所有邊長、各個 $5\pi/6$ 的角，以及 $7\pi/12$ 確是逆時針旋轉時第一個令 C 落在實軸上的角。

常見錯誤

- 轉了內角 $5\pi/6$，而不是外角 $\pi/6$。
- 旋轉了 $-5\pi/12$（順時針），或旋轉了 $\pi/2-5\pi/12$：旋轉是逆時針的，而 C 首次碰到實軸是在負半軸上。

STEP 之外

把乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 看成旋轉，是把複函數視為幾何變換（geometric transformation）的起點：$z \mapsto az+b$ 可給出平面上所有旋轉、放大（enlargement）和平移（translation），而這些變換構成一個羣（group）。正多邊形的頂點是等比級數的和（geometric sum）$2(1+\omega+\cdots+\omega^{k-1})$，與單位根（roots of unity）息息相關。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點發揮得淋漓盡致。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。