詳細解答

STEP II 2001，第 6 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2001，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s2-q6

關鍵思路

看似棘手的 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 其實只是 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$ 的另一種寫法：它就是把正切的差角公式（tangent subtraction formula）倒過來讀。一旦看穿這一點，第 (i) 部分便化為一次分部積分（integration by parts），而且剛好落在開首的積分上。第 (ii) 部分看來毫不相干，但映射 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 把 0 和 1 互換，而且它是自身的逆映射，所以用它作代換（substitution），便可把 (ii) 變回 (i)。

解答

開首的積分

以 $1 + x^2$ 除 x^4（或寫成 $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$），得

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

正是所求。

第 (i) 部分

設 $\theta = \tan^{-1} x$，則當 $0 \le x \le 1$ 時，有 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$。由差角公式，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-x}{1+x}.$$

想一想 有了 $\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{1-x}{1+x}$，是否真的就可以寫 $\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})=\frac{\pi}{4}-\theta$？

只有當 $\frac{\pi}{4}-\theta$ 落在 $\tan^{-1}$ 的值域（range）$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之內才可以。這裏 $0\le\frac{\pi}{4}-\theta\le\frac{\pi}{4}$，所以條件成立，於是在整個積分區間上

$$\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x.$$

因此

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-J,$$

其中 $J=\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$。取 $u=\tan^{-1}x$ 及 $\mathrm{d}v=x^3\,\mathrm{d}x$（於是 $v=\frac{1}{4}x^4$ 而 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$）作分部積分：

$$\begin{aligned}J&=\Big[\tfrac{1}{4}x^4\tan^{-1}x\Big]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

當中用了開首的結果。因此

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}.$$

第 (ii) 部分

想一想 那個古怪的權重 $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$ 是從哪裏來的？

它正是 $x^3\,\mathrm{d}x$ 在同一個變換下所變成的樣子。代入 $y=\frac{1-x}{1+x}$，解出 $x=\frac{1-y}{1+y}$：這個映射是自身的逆映射，並把 $x=0$ 送到 $y=1$，把 $x=1$ 送到 $y=0$。於是

$$1-y=\frac{2x}{1+x},\qquad 1+y=\frac{2}{1+x},\qquad \mathrm{d}y=-\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y=\frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\Big(-\frac{2}{(1+x)^2}\Big)\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\tan^{-1}y=\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$。把積分上下限對調，負號便被抵銷（$y$ 由 0 到 1 即 x 由 1 到 0）：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\tan^{-1}y\,\mathrm{d}y&=\int_1^0\Big(-\frac{x^3}{2}\Big)\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\Big)=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

這裏用了第 (i) 部分的結果。

驗算

- 兩個答案都是正數，這是必然的（每個被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 上均非負）：$\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6} \approx 0.02968$ 及 $\frac{\pi}{32} - \frac{1}{12} \approx 0.01484$。對原來的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），結果吻合至小數點後 12 位。
- (ii) 的答案恰好是 (i) 的一半，你可以在動手做任何代數運算之前，先用數值方法粗略核對一下。
- 在恆等式中代入 $x = 0$：$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。代入 $x = 1$：$\tan^{-1} 0 = 0$。兩者都與 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$ 相符。

常見錯誤

- 在 (ii) 中漏掉 $\mathrm{d}y$，或處理錯正負號：因子 $-\frac{2}{(1+x)^2}$ 與對調後的上下限，兩者的負號互相抵銷。
- 未檢查值域便寫下 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$；當 $x < -1$ 時此式並不成立（兩邊相差 π）。

STEP 之外

代換 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation），即形如 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的映射。這些映射在複合（composition）運算下構成一個羣（group），而這一個的階（order）為二。同樣的技巧，配合對稱性，可得出著名的結果 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2$，值得接着一試。莫比烏斯映射在複分析（complex analysis）中佔有核心地位；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）對它們有一番優美的幾何闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。