詳細解答

# STEP II 2001，第 5 題

純數學 • 駐點與積分

> **STEP II 2001，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q5

## 關鍵思路

駐點（stationary point）可直接由斜率（gradient）求得：它們位於 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 之處，而其性質則取決於斜率的正負號如何變化。由於指數因子恆為正，斜率的正負號只取決於多項式因子 $x(1-x^2)$，而這個因子對兩條曲線都相同。至於高度，第一個斜率可以準確地積分（留意 $u = x^2$）；第二個則不能，但我們並不需要它的值，只需比較兩個積分。

## 解答

**曲線 $C_1$**

由於對所有 $x$ 都有 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$，斜率為零當且僅當 $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$，即 $x = -1$、$0$ 及 $1$。此外，斜率的正負號與 $x(1-x)(1+x)$ 相同：

| | $x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < 1$ | $x > 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的正負號 | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

在 $x = 0$ 處，斜率由負變正，所以原點（它在曲線上）是極小點（minimum）。在 $x = 1$ 處，斜率由正變負，所以這是極大點（maximum）；同理，$x = -1$ 也是極大點。

要求出高度，我們進行積分。由於曲線通過原點，

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

? **想一想** 怎樣對 $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ 積分？

因子 $t$ 旁邊是一個 $t^2$ 的函數，這提示我們用代換（substitution）$u = t^2$，$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$：

$$y = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} (1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

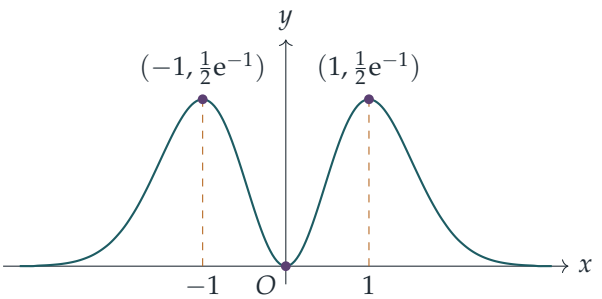
現在留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u\mathrm{e}^{-u}) = \mathrm{e}^{-u} - u\mathrm{e}^{-u} = (1-u)\mathrm{e}^{-u}$（用分部積分法（integration by parts）也會得到同樣的結果）。因此

$$y = \tfrac{1}{2}\Big[u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^{x^2} = \tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

在 $x = 1$ 處，這給出 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，所以極大點位於 $(1, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1})$，正如題目所求。由於 $y$ 是 $x$ 的偶函數（even function），另一個駐點是極大點

$$(-1, \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}).$$

**草圖**。 由 $y = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 可知：曲線關於 $y$ 軸對稱；$y \geq 0$，且只在原點取等號；又因為指數函數衰減的速度比 $x^2$ 增長的速度快，當 $x \to \pm\infty$ 時 $y \to 0$。所以這是一條「雙峯」曲線：它在原點與 $x$ 軸相切，上升至 $x = \pm 1$ 處兩個等高的極大點（高度為 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.18$），然後在兩邊逐漸下降，趨向 $x$ 軸。（下圖的縱向比例經過放大。）




**曲線 $C_2$**

同樣，對所有 $x$ 都有 $\mathrm{e}^{-x^3} > 0$，所以斜率恰好在 $x = -1, 0, 1$ 處為零，而且正負號與 $x(1-x)(1+x)$ 相同，得出的正負號表與之前完全一樣。所以原點（按題設在曲線上）是極小點，而 $x = 1$ 處的駐點是極大點。（$x = -1$ 處的駐點也是極大點，不過題目沒有問及。）

它的高度是

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

這個積分沒有初等原函數（elementary antiderivative），所以我們改為把它與 $C_1$ 的積分比較，而我們已知後者等於 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。

**想一想** 怎樣可以不計算 $k$ 的值，而把 $k$ 與 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ 比較？

比較被積函數（integrand）。當 $0 < x < 1$ 時，我們有 $x^3 < x^2$（把 $x < 1$ 兩邊乘以 $x^2 > 0$），所以 $-x^3 > -x^2$；又因為 $\mathrm{e}^t$ 是遞增函數，故 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$。此外，在這個範圍內 $x(1-x^2) > 0$，所以乘上它之後不等式的方向不變：

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{當} 0 < x < 1.$$

兩個被積函數在 $[0,1]$ 上都連續，而不等式在開區間上嚴格成立，所以在 $[0,1]$ 上積分會得到嚴格不等式（strict inequality）：

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

最後一個等式就是上面求得的 $C_1$ 在 $x = 1$ 處的高度。所以極大點位於 $(1,k)$，其中 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，正如題目所求。

## 驗算

用積法則（product rule）對 $\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 求導，得 $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$，而它在 $x = 0$ 處的值為 0，所以 $C_1$ 的結果正確。二階導數（second derivative）印證了駐點的分類：對兩條曲線都有 $y''(0) = 1 > 0$ 及 $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$。以數值方法（森遜法則（Simpson's rule））計算，$k \approx 0.2034$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$。

## 常見錯誤

- 忘記積分常數（constant of integration）：正是「通過原點」這個條件確定了它的值，而它對高度有影響。
- 只憑 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ 就聲稱 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，卻沒有指出 $x(1-x^2)$ 在 $(0,1)$ 上為正；若乘上的是負因子，不等式的方向便會倒轉。
- 說 $x^3 < x^2$「對所有 $x$ 成立」：它只在 $x < 1$、$x \neq 0$ 時成立，這正是為甚麼區間 $[0,1]$ 恰好符合我們所需。

## STEP 之外

第二部分是一個比較論證（comparison argument）：對於一個寫不出來的解，我們把它與一個寫得出來的解比較，從而了解它的一些性質。這個想法貫穿整個微分方程（differential equations）理論，當中的比較定理（comparison theorem）以較簡單方程的解來界

定棘手方程的解的範圍；它也貫穿分析學（analysis），當中積分的單調性（monotonicity）是一件基本工具。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）是個好去處，可以讓你看到即使沒有公式，也能從定性的角度對解作出多少論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。