詳細解答

STEP II 2001，第 4 題

純數學 • 倍角方程

> **STEP II 2001，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q4

關鍵思路

f 的每一項都含有因子 $\sin x$：$\sin 2x = 2\sin x\cos x$，而題目的提示對 $\sin 3x$ 也有同樣的作用。抽出 $\sin x$ 之後，剩下的是一個關於 $\cos x$ 的二次式（quadratic），而 P、Q、R 所滿足的條件，正好就是「這個二次式的判別式（discriminant）為負」。第二部分是同一個函數，只是取 $P = 1$、$Q = 1$、$R = -1$，並把 x 換成 $2nx$。這時二次式確實有根，功夫就在於找出哪一個根最接近容許範圍的上端。

解答

第一個結果

設 $c = \cos x$。利用 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 及題目給出的 $\sin 3x$ 恆等式（identity），

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)). \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{f}(x) = 0$ 當且僅當 $\sin x = 0$ 或 $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$。

首先，$R \neq 0$：若 $R = 0$，條件便會變成 $Q^2 < 0$，這是不可能的。因此括號內確實是一個關於 c 的二次式，其判別式為

$$(2Q)^2 - 4\cdot 4R\,(P - R) = 4(Q^2 - 4R(P - R)) < 0$$

這由假設可得。判別式為負的實係數二次式沒有實根，所以對任何實數 c，括號內的式子都不會等於零，當 $c = \cos x$ 時自然也不例外。故此 $\mathrm{f}(x) = 0$ 必然導致 $\sin x = 0$，即 $x = m\pi$，其中 m 為整數。反過來，每一個 $x = m\pi$ 都是 f 的零點（zero），所以這些正好就是全部零點，結果得證。

g 的最大根

設 $y = 2nx$。那麼 $g(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$，即是取 $P = 1$、$Q = 1$、$R = -1$ 時的 $f(y)$。這裏 $Q^2 = 1$ 並不小於 $4R(P - R) = -8$，所以第一個結果並不適用，而二次式有實根。設 $c = \cos y$，由上面的因式分解（factorisation）可得

$$g(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

所以 $g(x) = 0$ 當且僅當

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad 或 \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

$\cos y = 1$ 的情況已經包含在 $\sin y = 0$ 之內。因此以 y 表示的根為

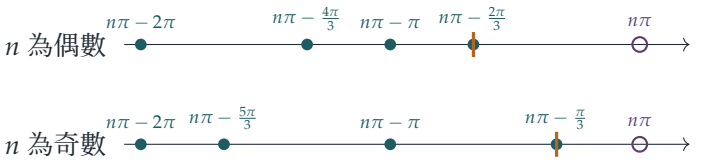
$$y = k\pi \quad 或 \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

在每一個周期（period）$[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ 之內，根位於 $2k\pi$ 加上 0、$\frac{2\pi}{3}$、π、$\frac{4\pi}{3}$ 之處。

範圍 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 變成 $0 < y < n\pi$，而右端點 $y = n\pi$ 本身是一個根，卻被排除在外。所以我們要找的是嚴格小於 $n\pi$ 的最大根，而關鍵只在於 $n\pi$ 在其所屬周期內的位置。

> **想一想** 為甚麼 n 的奇偶性（parity）有影響？

根的分佈規律每隔 2π 重複一次，而不是每隔 π。若 n 為偶數，$n\pi$ 是 2π 的倍數；若 n 為奇數，$n\pi$ 是 π 的奇數倍。在這兩種情況下，緊接在 $n\pi$ 之下的根，其間距並不相同。



（g 以 y 表示的根，範圍為 $n\pi$ 之下的最後一段 2π，按比例繪畫。空心圓圈標示被排除的端點，琥珀色的短線標示最大根。）

n 為偶數。這時 $n\pi = 2k\pi$，其中 $k = \frac{n}{2} \geq 1$，而在它之下的最後一個周期內，以 $n\pi$ 為基準量度，根為

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

其中最後一個是 $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$，它是根，因為其餘弦值為 $-\frac{1}{2}$。在 $\left(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi\right)$ 內沒有根：這個區間內沒有 π 的倍數，而 $\cos y = -\frac{1}{2}$ 則需要 $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$，但這裏 y 在模 2π 之下嚴格介乎 $\frac{4\pi}{3}$ 與 2π 之間。此外，由於 $n \geq 2$，有 $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$。所以最大根對應 $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$，而

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n \text{ 為偶數}).$$

n **為奇數**。這時 $n\pi = 2k\pi + \pi$，其中 $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$。在由 $2k\pi = n\pi - \pi$ 開始的周期內量度，$n\pi$ 之下的根位於偏移量 0 和 $\frac{2\pi}{3}$ 之處，所以候選的根是 $n\pi - \pi$ 和 $n\pi - \frac{\pi}{3}$。區間 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$ 對應於 y 在模 2π 之下嚴格介乎 $\frac{2\pi}{3}$ 與 π 之間，當中沒有根。而且 $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$。所以最大根對應 $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$，而

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n \text{ 為奇數}).$$

驗算

當 $n = 1$ 時，在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $\mathrm{g}(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$：公式給出 $x = \frac{\pi}{3}$，而確實有 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$。當 $n = 2$ 時，公式同樣給出 $\frac{\pi}{3}$（$y = \frac{4\pi}{3}$）。當 $n \to \infty$ 時，兩條公式都趨向 $\frac{1}{2}\pi$，這是理所當然的，因為根會愈來愈密集。我們以細密的網格對 $n = 1, \ldots, 12$ 的 g 作了數值掃描。每一個預測值（例如 $n = 3$ 時的 $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$）都是根，而 g 在該值與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間保持同一符號。至於第一部分，隨機抽取 2000 組滿足 $Q^2 < 4R(P-R)$ 的三元組，所得的括號內式子在 $[-1, 1]$ 上全部沒有零點。

常見錯誤

- 答 $x = \frac{1}{2}\pi$ 本身：對每一個 n，它都是 g 的根，但它在開區間（open interval）之外。
- 忘記了由 $\sin y = 0$ 得出的根，只保留 $\cos y = -\frac{1}{2}$。當 n 為偶數時，$y = n\pi - \pi$ 是一個根，雖然並非最大的一個。
- 只寫 $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$，漏掉了 $\frac{4\pi}{3}$ 那一族解。這樣在 n 為偶數時會得出錯誤答案。

STEP 之外

這個因式分解之所以行得通，是因為 $\sin mx / \sin x$ 永遠是 $\cos x$ 的多項式（polynomial）：這些就是第二類切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials of the second kind）$U_{m-1}(\cos x)$。所以任何有限正弦級數（sine series）$\sum a_m \sin mx$ 都等於 $\sin x$ 乘以一個 $\cos x$ 的多項式，而數算它的零點，就變成數算多項式在 $[-1, 1]$ 內的根。這個想法是逼近理論（approximation theory）和傅立葉分析（Fourier analysis）中許多內容的基礎。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）透過 e^{ix}，為倍角公式（multiple-angle formulae）提供了一個優美的視角。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。