詳細解答

STEP II 2001，第 3 題

純數學 • 歐幾里得幾何

> **STEP II 2001，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q3

關鍵思路

把長方體（cuboid）放進坐標系，令其中一個頂點位於原點，各棱沿坐標軸方向。這樣每個頂點的位置向量（position vector）都一目了然，對角線只是這些向量之差，而兩條對角線之間的夾角可直接由純量積（scalar product）求得。體積與表面積之比是 λ 的一個簡單有理函數（rational function），最後一部分則把關於 R 的條件轉化為關於 λ 的條件，從而把前兩個結果連繫起來。

解答

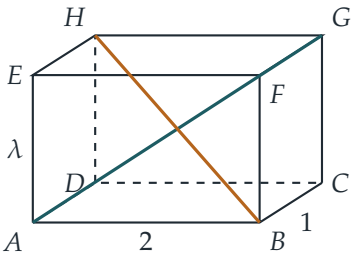
對角線之間的夾角

由於棱 AE、BF、CG、DH 垂直於各個面，各頂點處的角全是直角，因此可取坐標軸沿 AB、AD 和 AE 方向，並以 A 為原點：

$$A = (0,0,0), \quad B = (2,0,0), \quad C = (2,1,0), \quad D = (0,1,0),$$

而頂面就是把底面升高 λ：

$$E = (0,0,\lambda), \quad F = (2,0,\lambda), \quad G = (2,1,\lambda), \quad H = (0,1,\lambda).$$



兩條對角線的方向向量（direction vector）為

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

長度均為 $\sqrt{5+\lambda^2}$，而且

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

設 θ 為這兩個向量之間的夾角，則

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5 + \lambda^2}.$$

? **想一想** 絕對值符號（modulus sign）是從哪裏來的？

兩條相交的直線形成兩個角 θ 和 $\pi - \theta$，它們的餘弦互為相反數。其中的銳角（當 $\lambda^2 = 3$ 時則為直角）就是餘弦非負的那一個，所以

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3 - \lambda^2}{5 + \lambda^2}\right|,$$

正是所求。

比值 R

體積為 $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$。表面由面積分別為 2×1、$2 \times \lambda$ 和 $1 \times \lambda$ 的面各兩個組成，所以表面積為 $2(2 + 3\lambda)$。因此

$$R = \frac{2\lambda}{2(2+3\lambda)} = \frac{\lambda}{2+3\lambda}.$$

由於 $\lambda > 0$，分母為正數，於是

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

而這顯然成立。所以對任何可能的 λ，均有 $R < \frac{1}{3}$。（當 $\lambda \to \infty$ 時，$R \to \frac{1}{3}$，所以這個界不能再改進。）

最後一部分

同樣因為 $2 + 3\lambda > 0$，可以把不等式兩邊同乘分母：

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2 + 3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

現設 $\lambda \geq 2$。則 $\lambda^2 \geq 4 > 3$，所以 $\lambda^2 - 3 > 0$，絕對值符號可以去掉：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2 - 3}{\lambda^2 + 5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2 + 5}.$$

寫成這個形式，便可看出 $\cos\alpha$ 隨 λ^2 增大而增大。由 $\lambda^2 \geq 4$ 得 $\lambda^2 + 5 \geq 9$，所以

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

α 和 $\arccos\frac{1}{9}$ 都在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 內，而餘弦在這個區間上嚴格遞減（strictly decreasing），所以由 $\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$ 可得

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

這正是要證明的結果。等號成立當且僅當 $\lambda = 2$，即 $R = \frac{1}{4}$。

驗算

- 當 $\lambda^2 = 3$ 時，公式給出 $\cos\alpha = 0$。驗算：$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + 3 = 0$，所以兩條對角線確實互相垂直。
- 當 $\lambda \to \infty$ 時，長方體變成又高又窄的棱柱（prism），兩條對角線都變得接近垂直，所以 $\alpha \to 0$；公式給出 $\cos\alpha \to 1$，與此吻合。
- 當 $\lambda = 2$ 時：體積為 4，表面積為 $2(2 + 4 + 2) = 16$，所以 $R = \frac{1}{4}$，而 $\cos\alpha = \frac{1}{9}$，所以 $\alpha \approx 83.6°$。以 10^5 個隨機的 λ 值作數值檢驗，結果證實了夾角公式、$R < \frac{1}{3}$，以及每當 $R \geq \frac{1}{4}$ 時 $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$。

常見錯誤

- 忘記加絕對值符號：當 $\lambda^2 < 3$ 時，向量 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{BH}$ 所成的是鈍角，而所求的銳角是它的補角。
- 把最後一個不等式的方向弄反：餘弦較大，角就較小，因為餘弦在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上遞減。

STEP 之外

把物體放進坐標系，再用純量積求角度，是向量幾何的基本工具；在大學一年級的線性代數（linear algebra）課程中，它會推廣為任意維數的內積（inner product）：$\mathbb{R}^n$ 中兩個向量之間的夾角是用 $\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$ 來定義的，而柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）保證了這個值落在 $[-1, 1]$ 之內。有一道不錯的練習：證明 n 維單位立方體的長對角線與每條棱所成的角的餘弦為 $1/\sqrt{n}$，所以當 n 增大時，這個角趨向

直角。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把這些概念講解得十分清楚。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。