詳細解答

STEP II 2001，第 2 題

純數學 • 整數部分的求和

STEP II 2001，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s2-q2

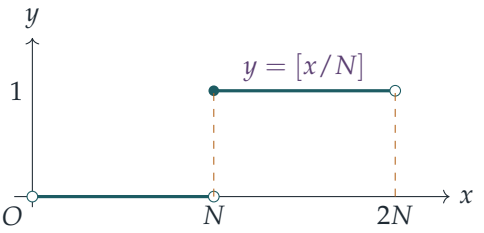
關鍵思路

指數 $[k/N]$ 看似棘手，但當 k 由 1 取到 $2N$ 時，它其實只有三個可能的值，而草圖正好顯示它在哪裏跳升。弄清這一點之後，正負號 $(-1)^{[k/N]}$ 在 k 的三個區段上各自保持不變，於是每個和式都可以按區段拆開：第 (i) 部分拆成等差級數（arithmetic series），第 (ii) 部分拆成等比級數（geometric series）。唯一要小心的，是各區段的端點。

解答

草圖

當 $0 < x < N$ 時，$0 < x/N < 1$，所以 $[x/N] = 0$。當 $N \le x < 2N$ 時，$1 \le x/N < 2$，所以 $[x/N] = 1$。圖像是一級階梯：跳升發生在 $x = N$，函數在該點已經取值 1；右端點 $x = 2N$ 並不包括在內（函數在該處的值會是 2）。



實心點表示包括該點，空心點表示不包括該點。

計算和式時，我們需要的是整數值 $k = 1, 2, \ldots, 2N$。從圖像讀出（並補上端點 $k = 2N$）：

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

因此，$(-1)^{[k/N]}$ 在 $k \le N-1$ 時是 $+1$，在 $N \le k \le 2N-1$ 時是 -1，而在 $k = 2N$ 這單獨一項又變回 $+1$。（當 $N = 1$ 時，第一個區段是空的；由於空和等於 0，以下所有公式仍然成立。）

> **想一想** 為甚麼不能直接說首 N 項取 $+$ 號、其後 N 項取 $-$ 號？

因為跳升恰好發生在 N 的倍數上：$k = N$ 這一項已經有 $[k/N] = 1$，而最後一項 $k = 2N$ 有 $[k/N] = 2$，所以它是正的。把這兩個端點處理正確，就是整道題的關鍵。

第 (i) 部分

按三個區段拆開，

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \;-\; \sum_{k=N}^{2N-1} k \;+\; 2N.$$

第一個和是 $\frac{1}{2}(N-1)N$。第二個和共有 N 項，由 N 到 $2N-1$，所以它等於 N 乘以首項與末項的平均值：$\frac{1}{2}N(3N-1)$。因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}(N^2 - N) - \tfrac{1}{2}(3N^2 - N) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

用同樣的拆法，得

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \;-\; \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \;+\; 2^{-2N}.$$

兩個和都是公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比級數。利用 $\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}(1 - 2^{-(b-a+1)})/\frac{1}{2} = 2^{1-a} - 2^{-b}$，

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$

$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

所以

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

設 $t = 2^{-N}$，上式就是 $1 - 4t + 3t^2$，可以漂亮地因式分解：

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\left(1 - \frac{3}{2^N}\right).}$$

當 $N \to \infty$ 時，$2^{-N} \to 0$ 且 $4^{-N} \to 0$，所以

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

這個結果合情合理：隨着 N 增大，正號區段 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ 愈來愈長，其和趨近 1；而負號區段的起點已經排得很後，它的總和大約是 2^{1-N}，可以忽略不計。

驗算

- $N = 1$：各項為 $k = 1$（此時 $[1] = 1$）和 $k = 2$（此時 $[2] = 2$）。第 (i) 部分給出 $-1 + 2 = 1 = 2 - 1$，第 (ii) 部分給出 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，與 $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ 相符。
- $N = 2$：對應 $k = 1, 2, 3, 4$ 的正負號依次為 $+, -, -, +$。於是 $1 - 2 - 3 + 4 = 0 = 4 - 4$，而 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$。
- 我們以分數作精確計算，對 N 由 1 到 59 的每一個值驗證了這兩條公式。例如 $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$。

常見錯誤

- 把 $k = N$ 歸入正號區段，或者忘記最後一項 $k = 2N$ 的指數是 2，因而是正的。
- 數錯 $\sum_{k=N}^{2N-1}$ 的項數：它共有 N 項，而不是 $N - 1$ 項。

STEP 之外

整數部分函數（integer-part function，又稱下取整函數 floor function）在數論（number theory）中隨處可見：經典的例子是勒讓德公式（Legendre's formula），它指出整除 $n!$ 的質數 p 的最高次冪是 $\sum_{j\ge 1}[n/p^j]$。像第 (ii) 部分那樣正負號按區段變化的和式，也是一個淺易的入門例子，讓我們初步接觸級數各項的重排（rearranging）與分組（grouping），而分析（analysis）課程會把這些做法嚴格化。想看看下取整函數如何大派用場，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門名著）是個絕佳的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。