詳細解答

STEP II 2001，第 14 題

概率與統計 • 最小方差估計量

> **STEP II 2001，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q14

關鍵思路

T 是兩個獨立（independent）伯努利變量（Bernoulli variable）的加權組合，因此它的平均值（mean）和方差（variance）可直接由期望值的線性性質（linearity of expectation），以及適用於獨立的 X、Y 的法則 $\operatorname{Var}(aX+cY) = a^2\operatorname{Var}(X) + c^2\operatorname{Var}(Y)$ 得出。權重經過特意選取，使得無論 λ 取何值，平均值都是 p：T 是 p 的無偏估計量（unbiased estimator），而題目要找的正是其中最好的一個。至於最後一部分，中心極限定理（central limit theorem）令 $\overline{T}$ 近似服從正態分佈（normal distribution），而平均值固定的正態變量，方差最小時最為集中。

解答

T 的平均值與方差

這裏 X 和 Y 都是伯努利變量，且

$$\mathrm{E}(X) = p, \quad \operatorname{Var}(X) = p(1-p), \qquad \mathrm{E}(Y) = 2p, \quad \operatorname{Var}(Y) = 2p(1-2p).$$

（若一個變量以概率 q 取值 1，否則取值 0，則 $\mathrm{E} = q$ 且 $\mathrm{E}(\cdot^2) = q$，所以方差是 $q - q^2 = q(1-q)$。）由期望值的線性性質，

$$\mathrm{E}(T) = \lambda p + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)\cdot 2p = \lambda p + (1-\lambda)p = p,$$

正如所求。由於兩枚硬幣互相獨立，X 和 Y 亦獨立，所以沒有協方差（covariance）項，而

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T) &= \lambda^2\operatorname{Var}(X) + \tfrac{1}{4}(1-\lambda)^2\operatorname{Var}(Y)\\ &= \lambda^2 p(1-p) + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)^2 p(1-2p).\end{aligned}$$

求方差的最小值

記 $V(\lambda) = \mathrm{Var}(T)$。這是 λ 的二次函數，首項係數 $p(1-p) + \frac{1}{2}p(1-2p)$ 為正（因為 $0 < p < \frac{1}{2}$，兩項皆為正），所以它只有一個最小值，出現在 $V'(\lambda) = 0$ 之處：

$$V'(\lambda) = 2\lambda p(1-p) - (1-\lambda)p(1-2p) = 0.$$

兩邊除以 $p > 0$，再把含 λ 的項合併，

$$\lambda[2(1-p) + (1-2p)] = 1 - 2p \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1-2p}{3-4p},$$

這正是題目給出的值。（這裏 $3 - 4p > 1 > 0$，所以不會出現除以零的情況。）

我們還需要最小值本身。設 $a = p(1-p)$ 及 $c = \frac{1}{2}p(1-2p)$，則 $V = a\lambda^2 + c(1-\lambda)^2$，在 $\lambda = c/(a+c)$（即上面的值）處取得最小值，由此得

$$V_{\min} = a\Big(\frac{c}{a+c}\Big)^2 + c\Big(\frac{a}{a+c}\Big)^2 = \frac{ac(a+c)}{(a+c)^2} = \frac{ac}{a+c}.$$

現在 $a + c = \frac{1}{2}p[2(1-p) + (1-2p)] = \frac{1}{2}p(3-4p)$ 而 $ac = \frac{1}{2}p^2(1-p)(1-2p)$，所以

$$V_{\min} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{3-4p}.$$

n 次擲幣的平均值

設 $T_1, \ldots, T_n$ 為 n 次擲幣中 T 的取值；它們互相獨立，各自的平均值為 p，方差為 $V(\lambda)$。於是

$$\mathrm{E}(\overline{T}) = p, \qquad \mathrm{Var}(\overline{T}) = \frac{V(\lambda)}{n}.$$

想一想 T 只取四個值。為甚麼我們可以把 $\overline{T}$ 當作正態變量來處理？

因為 $\overline{T}$ 是 n 個獨立同分佈（independent, identically distributed）且方差有限的變量的平均值，而 $n > 30$ 夠大，所以根據中心極限定理，不論單獨一個 T 的分佈形狀如何，$\overline{T}$ 都近似服從 $\mathrm{N}(p, V(\lambda)/n)$。記 $\sigma_\lambda = \sqrt{V(\lambda)/n}$ 及 $Z = (\overline{T} - p)/\sigma_\lambda \approx \mathrm{N}(0,1)$，則

$$\mathrm{P}(|\overline{T} - p| < b) = \mathrm{P}\Big(|Z| < \frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) \approx \Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - \Phi\Big(-\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - 1,$$

其中用到對稱性 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$。

由於 $b > 0$ 固定，而 Φ 嚴格遞增（strictly increasing），上式在 b/σ_λ 最大時最大，亦即在 σ_λ 最小時最大，也就是 $V(\lambda)$ 取最小值之時。這發生在 $\lambda = (1-2p)/(3-4p)$，此時

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{V_{\min}}{n} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{(3-4p)n} = s^2.$$

所以當 λ 變動時，$\mathrm{P}(|\overline{T} - p| < b)$ 的最大值約為 $2\Phi(b/s) - 1$，正如所求。

驗算

- 當 $\lambda = 1$ 時，$T = X$，公式給出 $\operatorname{Var}(T) = p(1-p)$；當 $\lambda = 0$ 時，$T = \frac{1}{2}Y$，公式給出 $\frac{1}{4} \cdot 2p(1-2p)$。兩者都正確。
- $V_{\min}$ 比這兩個值都小：它等於 $p(1-p)$ 乘以 $\frac{1-2p}{3-4p} < 1$。把兩枚硬幣結合起來，勝過單獨使用其中任何一枚。
- 數值上，取 $p = 0.3$、$n = 100$、$b = 0.03$：最佳的 λ 是 $\frac{2}{9}$，$s \approx 0.0216$，而 $2\Phi(b/s) - 1 \approx 0.835$。模擬 40 000 輪、每輪擲幣 100 次，得出 0.836；而 $\lambda = 1$（只用硬幣 A）則只得約 0.487。

常見錯誤

- 寫成 $\operatorname{Var}(\frac{1}{2}(1-\lambda)Y) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\operatorname{Var}(Y)$：常數從方差中提出來時要平方。
- 忘記說明爲甚麼把方差減至最小就能使概率最大：這需要 Φ 遞增，以及對每個 λ 而言 $\overline{T}$ 的平均值都是 p。

STEP 之外

這是估計理論（estimation theory）的初次體驗：在 p 的所有無偏估計量 $\lambda X + \frac{1}{2}(1-\lambda)Y$ 之中，我們找出了方差最小的一個。答案是按各個觀測值的方差成反比來加權，這與統計學中用來結合精確度不同的量度結果的法則相同（逆方差加權，inverse-variance weighting），而最小值 $ac/(a+c)$ 正是「並聯電阻」公式 $1/V_{\min} = 1/a + 1/c$。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了最後一步背後的中心極限定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。