詳細解答

STEP II 2001，第 13 題

概率與統計 • 連續分佈與估計

STEP II 2001，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s2-q13

關鍵思路

題目直接給出了生存函數（survival function）$\mathrm{P}(T > t)$，所以令它等於 $\frac{1}{2}$ 便可求出中位數（median）；至於平均值（mean），則先求導得出密度函數，再積分。實驗提供了樣本中位數（九個由小至大排列的壽命中的第五個）和樣本平均值，把它們與公式對應起來，便得到關於 α 和 k 的兩條方程。兩式相除可消去 k，餘下一條只含 α 的方程。最後要求的是一個條件概率（conditional probability），而那裏正有一個令人驚喜的結果等着我們。

解答

中位數與平均值

設 $S(t) = \mathrm{P}(T > t) = (1+kt)^{-\alpha}$，其中 $t \geq 0$。要使它由 1 下降至 0，必須有 $k > 0$。

中位數。中位數 M 滿足 $\mathrm{P}(T > M) = \frac{1}{2}$，所以

$$(1+kM)^{\alpha} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + kM = 2^{1/\alpha} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2^{1/\alpha} - 1}{k}.$$

平均值。累積分佈函數（cumulative distribution function）是 $F(t) = 1 - (1+kt)^{-\alpha}$，所以概率密度函數（probability density function）是

$$f(t) = F'(t) = \alpha k\,(1+kt)^{-\alpha-1}, \qquad t \geq 0.$$

然後用分部積分法（integration by parts），取 $u = t$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}$，於是

$v = -(1+kt)^{-\alpha}$，

$$m = \int_0^\infty t\,\alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-t(1+kt)^{-\alpha}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty (1+kt)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[-\frac{(1+kt)^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

兩個在無窮遠處的極限都用到 $\alpha > 1$：$t(1+kt)^{-\alpha}$ 的表現類似 $t^{1-\alpha}/k^\alpha \to 0$，而 $(1+kt)^{1-\alpha} \to 0$。（若 $\alpha \le 1$，平均值便會是無限大，這正是題目堅持要求 $\alpha > 1$ 的原因。）所以

$$M = \frac{2^{1/\alpha}-1}{k}, \qquad m = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

估計 α 和 k

共有九個燈泡，第五個失效的燈泡正是九個順序排列的壽命中居中的一個：它就是樣本中位數（sample median）。所以我們估計 $M \approx 1000$，並由樣本平均值得 $m \approx 2400$。

想一想 我們有兩條方程和兩個未知數，但 k 在兩條方程中都出現。怎樣才能單獨求出 α？

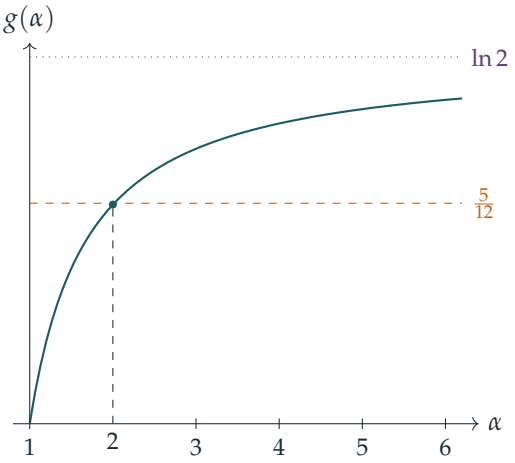
相除：由於 M 和 m 都與 $1/k$ 成正比，k 會被約去。由此得

$$\frac{M}{m} = (2^{1/\alpha}-1)(\alpha-1) \approx \frac{1000}{2400} = \frac{5}{12} \approx 0.4167.$$

把左方記作 $g(\alpha)$。當 $\alpha = 2$ 時，

$$g(2) = (\sqrt{2}-1)(2-1) = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142,$$

這與 5/12 相差不到 0.003。要看出沒有其他數值同樣吻合，可留意 $g(1.9) \approx 0.396$ 及 $g(2.1) \approx 0.430$，所以 5/12 這個值介乎兩者之間。事實上，g 由 $g(1) = 0$ 開始穩步遞增，當 $\alpha \to \infty$ 時趨向 $\ln 2 \approx 0.693$（見圖），所以它只會取 5/12 這個值一次，而且是在略大於 2 的某個 α 處。因此 $\alpha \approx 2$。



現在把 $\alpha = 2$ 代回任何一條公式。由平均值得

$$k = \frac{1}{m(\alpha - 1)} \approx \frac{1}{2400},$$

而由中位數得 $k = (\sqrt{2} - 1)/1000 \approx 4.14 \times 10^{-4}$。兩者十分接近，於是

$$k \approx 4.2 \times 10^{-4} \text{ 每小時}.$$

條件概率

一個燈泡運作了 M 小時後再多運作 $m - M$ 小時，合共便運作了 m 小時。由於 $m > M$，事件 $\{T > m\}$ 包含於 $\{T > M\}$ 之內，所以

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = \frac{\mathrm{P}(T > m)}{\mathrm{P}(T > M)} = \frac{(1 + km)^{-\alpha}}{1/2} = \frac{2}{(1 + km)^{\alpha}}.$$

（嚴格來說，是在 M 小時那一刻發現燈泡仍在運作；對於連續的壽命，$T \geq M$ 與 $T > M$ 的概率相同。）驚喜來了：不論 k 是多少，都恰好有 $km = 1/(\alpha - 1)$，所以 $1 + km = \alpha/(\alpha - 1)$，而

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = 2\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

當 $\alpha = 2$ 時，這等於 $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$。所以概率的估計值是

$$\mathrm{P}(\text{再多運作} m - M \text{ 小時}) \approx \tfrac{1}{2}.$$

最後這一步完全用不着 k 的估計值。

驗算

- 在中位數處，$S(M) = (2^{1/\alpha})^{-\alpha} = \frac{1}{2}$，與預期相符。隨機選取 $\alpha > 1$ 和 $k > 0$，對 $S(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上作數值積分，結果與 $m = 1/(k(\alpha-1))$ 吻合（回想對於非負的變量，有 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$，這正是我們計算過程中的第二個積分）。
- 準確地解 $g(\alpha) = 5/12$ 可得 $\alpha \approx 2.015$，這時條件概率是 $2(1-1/\alpha)^\alpha \approx 0.502$，所以把它約為 $\alpha = 2$ 幾乎沒有任何損失。
- 以 $\alpha = 2$、$k = 1/2400$ 模擬 400 000 個壽命（取 $T = (U^{-1/2} - 1)/k$，其中 U 在 $(0,1)$ 上均勻分佈），得出 $\mathrm{P}(T > m \mid T > M) \approx 0.501$。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{P}(T > t)$ 當作累積分佈函數，求導時漏掉負號，結果得出負的「密度」。
- 以 $\mathrm{P}(T > m - M)$ 作答，彷彿燈泡在時刻 M 重新開始計算壽命。這個分佈並不具有無記憶性（memoryless；只有指數分佈才有），所以條件 $T > M$ 是有影響的。
- 把第五個失效的時間當作平均值的估計，而不是中位數的估計。

STEP 之外

這是一種帕累托（Pareto）型分佈，稱為 Lomax 分佈，是描述壽命和收入的標準模型，帶有重尾（heavy tail）：$\mathrm{E}(T^r)$ 只在 $r < \alpha$ 時才是有限的。我們在這裏所用的是*矩估計法*（method of moments；嚴格來說，是配對一個分位數和一個矩）：選取參數，使模型的概括統計量等於樣本的概括統計量。大學一年級的統計學會把這個方法與最大似然估計（maximum likelihood）作比較，並探討只憑九個燈泡得出的估計究竟有多準確。比值 $\mathrm{P}(T > s+t \mid T > s)$ 是可靠性理論（reliability theory）中所用的生存函數：在這裏它隨 s *遞增*，所以舊燈泡比新燈泡更有可能繼續運作下去。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門）是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。