詳細解答

STEP II 2001，第 11 題

力學 • 拋體運動

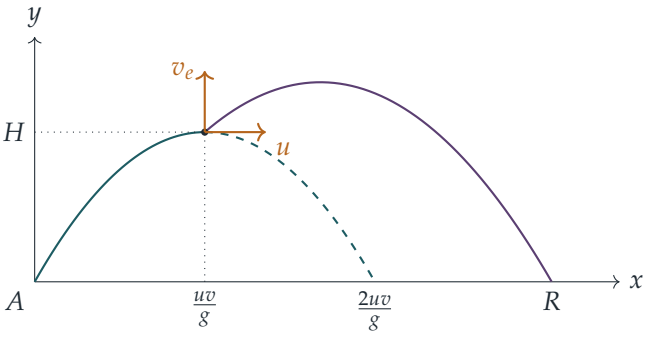
> **STEP II 2001，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q11

關鍵思路

以爆炸一刻為界，把整段飛行分成兩段。爆炸之前，導彈是普通的拋體（projectile），最高點就是垂直速度為零之處。爆炸之後，碎片 P 是一個新的拋體，從該高度以速度 (u, v_e) 拋出，因此落地所需時間可由一條二次方程（quadratic）求得。至於第二部分，射程（range）是 v_e 的遞增函數（increasing function），所以「$R > D$」就變成「v_e 大於恰好令 $R = D$ 的那個值」。

解答

我們把導彈和碎片 P 視為只受重力作用的質點（particle），並設地面為水平。取 A 為原點，x 軸沿水平方向，y 軸垂直向上。



虛線顯示假如沒有爆炸，導彈本來會落在哪裏；紫色曲線則是 P 的路徑。

P 的射程

爆炸之前。垂直速度為 $v - gt$，在 $t_1 = v/g$ 時變為零。此刻導彈的水平位移為

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

而它的高度，可由 $v^2 = 2gH$（末垂直速率為零）得出：

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

爆炸之後。碎片 P 從高度 H 出發，水平速度為 u，垂直速度為向上的 v_e。以爆炸一刻起計的時間為 t，它的高度是

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $y = 0$ 時它落地：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

把它看成 gt 的二次方程，

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

兩根之積為 $-v^2 < 0$，所以其中一個根是負數。這個根代表在爆炸之前拋物線（parabola）與地面相交的時刻，與本題無關。因此爆炸之後的飛行時間是

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

水平速度自始至終都是 u，所以總水平距離是

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

亦即

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

這正是所需的結果。

$R > D$ 的條件

設

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

那麼 $R > D$ 等價於 $f(v_e) > k$。由於 $D > 2uv/g$，我們有 $gD > 2uv$，所以 $k > v > 0$。

? **想一想** 為甚麼只需找出令 $R = D$ 的那一個 v_e 值就足夠？

因為 f 是嚴格遞增（strictly increasing）的：

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

這是由於當 $v \neq 0$ 時 $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$。（從物理上看，向上的衝擊愈猛，$P$ 留在空中的時間就愈長。）所以若 $f(v_e^*) = k$，則 $f(v_e) > k$ 當且僅當 $v_e > v_e^*$。

要求出 v_e^*，解 $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$。兩邊平方得

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

平方可能會引入增根（false root），所以我們要驗證 $k - v_e^* \geq 0$：事實上 $k - v_e^* = \frac{k^2 + v^2}{2k} > 0$，所以 v_e^* 確實滿足 $f(v_e^*) = k$。

現在把 k 代入：

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

所以

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

因此，由於 f 是遞增的，只要

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

便有 $R > D$，這就是所需的條件。事實上，以上論證說明這個條件也是必要的。注意因為 $k > v$，所以 $v_e^* > 0$，即確實需要一個向上的衝擊。

驗算

- 若 $v_e = 0$，公式給出 $gR/u = 2v$，所以 $R = 2uv/g$：這正是沒有爆炸的拋體的一般射程，合乎預期。這也是題目假設 $D > 2uv/g$ 的原因，否則根本不需要任何衝擊。
- 取 $u = v = 10$、$g = 10$ 及 $D = 30$，臨界值為 $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$，於是 $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$，所以 $R = 30 = D$，恰好相等。
- 以數值方法逐步模擬這兩段飛行，所得結果與射程公式相差約 10^{-9}；另外 10^5 個隨機個案亦確認 $R > D$ 當且僅當 $v_e > v_e^*$。

常見錯誤

- 忘記爆炸之前已經走過的水平距離 uv/g，把 R 從爆炸點正下方起計，而不是從 A 起計。

- 把由最高點落地所需的時間又當作 v/g，忽略了新增的向上速度 v_e。
- 把 $\sqrt{v_e^2+v^2}=k-v_e$ 兩邊平方時，沒有驗證右邊為非負，或者沒有解釋為何一個使等式成立的值可以化為一個不等式。

STEP 之外

爆炸過程中整個系統的動量守恆（conservation of momentum），所以即使 P 偏離了原來的拋物線，兩塊碎片的質心（centre of mass）仍然沿着原來的拋物線繼續前進。內力不能改變質心的運動，這個原理正是大學一年級力學課程中火箭運動和碰撞的起點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩個課題都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。