詳細解答

STEP II 2001，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP II 2001，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s2-q10

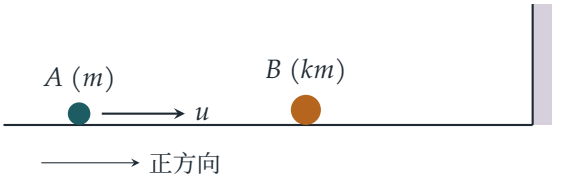
關鍵思路

這題是兩次碰撞加一場追逐。第一次碰撞用的是標準的兩條方程：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。B 從牆上反彈之後，唯一的問題是：正在折返的 B 能否與 A 相遇。這恰好在 A 朝牆方向的速度大於 B 的速度時發生，由此便得出關於 k 的不等式。至於能量部分，我們把動能（kinetic energy）寫成 k 的函數，再與 $mu^2/27$ 比較。比較的結果原來是一個完全平方（perfect square）。

解答

第二次碰撞

把 A 和 B 當作光滑平面上的質點（particle），因此水平方向的衝量（impulse）只來自碰撞。取由 A 指向牆的方向為正方向。設 v_A 和 v_B 分別為 A 和 B 在第一次碰撞剛結束時的速度。



第一次碰撞。 動量守恆，而分離速率等於接近速率的 e_1 倍：

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

把第二條方程乘以 k 再加到第一條方程，得 $(1+k)v_B = (1+e_1)u$。所以

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

由於 $v_B > 0$，B 繼續向牆移動。A 則可能向前移動、靜止或向後移動，視乎 $1-ke_1$ 的正負號而定。

牆。 B 以速率 v_B 撞牆，並以速率 $e_2 v_B$ 反彈，所以它的速度變為 $-e_2 v_B$。與此同時，A 繼續以恆定速度 v_A 移動。注意 A 不可能先到達牆，因為 $v_A < v_B$（兩者之差為 $e_1 u > 0$），而且 A 起初在 B 的後面。

想一想 反彈之後，A 和 B 可能朝同一方向移動。我們怎樣判斷它們會否相遇？

反彈之後，B 位於 A 與牆之間，而且再沒有其他作用施加於任何一個質點。所以兩者之間的距離會縮短，當且僅當 A 的速度大於 B 的速度：

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

若 $v_A > 0$，兩者相向而行。若 $v_A \le 0$，則是 B 在追趕 A，而且只有在較快時才追得上。這一條不等式已涵蓋兩種情況。代入後，再乘以正數 $(1+k)/u$，得

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

其中最後一步除以了 $e_1 > 0$。所以只要這條不等式成立，便會發生第二次碰撞，正如題目所求。（若等號成立，A 和 B 會以相同速度離開，永不相遇。）

動能

當 $e_1 = \frac{1}{3}$ 及 $e_2 = \frac{1}{2}$ 時，

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

在 B 剛反彈之後，A 的速率仍是 $|v_A|$，而 B 的速率是 $e_2 v_B$。所以總動能為

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\left[(3-k)^2 + 4k\right] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

現在與 $mu^2/27$ 比較，取公分母 $54(1+k)^2$：

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\left[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\right] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}(k^2-10k+25) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

想一想 既然平方永不為負，條件 $k < 5$ 又有甚麼用？

右邊永不為負，而且只有在 $k = 5$ 時才等於零。所以當 $k < 5$ 時，我們有 $(k-5)^2 > 0$，因此

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

正如題目所求。5 這個數值並非巧合。代入這些系數後，第一部分的上界是 $(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3})/\frac{1}{3} = 5$。所以 $k < 5$ 正是發生第二次碰撞的條件。當 $k = 5$ 時，兩個質點在反彈後都以 $-u/9$ 移動，而能量恰好是 $mu^2/27$。

驗算

- 取 $e_1 = 1$ 及 $k = 1$（質量相等，完全彈性）。這時 $v_A = 0$ 及 $v_B = u$，即大家熟悉的速度互換。上界變成 $k < 1 + 2e_2$，而只要 $e_2 > 0$，$k = 1$ 便滿足這條件：折返的 B 必定會撞上靜止的 A。
- 當 $k = 5$ 時，公式給出 $v_A = -\frac{u}{9}$ 及 $-e_2 v_B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{9} = -\frac{u}{9}$，兩個速度相等，與上文所說一致。
- 數值方面，以精確分數計算 k 由 0.001 至 4.999 的情況，比值 $T/(mu^2/27)$ 的最小值為 1.00000001，出現在 $k = 5$ 附近，而且始終大於 1。另外隨機測試了 20 000 組 (k, e_1, e_2)，沒有發現不等式與直接比較反彈後速度所得結果不一致的情況。

常見錯誤

- 要求 $v_A > 0$。A 即使正在向後移動，仍然可以被 B 追上。正確的條件是比較反彈後兩者的速度。
- 忘記牆會把 B 的方向反轉。它的速度變為 $-e_2 v_B$，而不是 $e_2 v_B$。
- 計算能量時用了 B 撞牆前的速率。題目要求的是剛反彈後的能量，所以 B 的速率是 $e_2 v_B$。

STEP 之外

牛頓實驗定律是一個模型，用來描述撞擊期間那短暫而劇烈的形變過程。恢復系數（coefficient of restitution）概括了相對動能損失了多少。在大學一年級的力學課程中，碰撞通常會在質心參考系（centre-of-mass frame）中分析。在這個參考系中，碰撞只是把相對速度反轉並乘以 e，而損失的能量為 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$，其中 μ 是約化質量（reduced

mass），w 是接近速率。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。