詳細解答

STEP II 2001，第 1 題

純數學 • 二項式近似

> **STEP II 2001，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

關鍵思路

當 x 很小時，$(1-x)^{1/2}$ 的二項級數（binomial series）收斂（converge）得很快，所以只取首幾項，便可得到極佳的有理近似（rational approximation）。訣竅在於如何選取 x：我們希望 $1-x$ 等於某個平方數乘以所求平方根的那個數，再除以十的某次冪。這樣，$1-x$ 的平方根就是所求平方根的簡單倍數。由於 $99 = 9 \times 11$ 和 $9999 = 9 \times 1111$，該怎樣選幾乎是不言而喻的。

解答

二次近似

由二項展開（binomial expansion），當 $|x| < 1$ 時，

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

所以當 x 很小時，

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

我們同時求得第一個被略去的項 $-\frac{1}{16}x^3$，稍後估計誤差（error）時會用到。事實上，首項之後的每一項都是負數（當 $n \geq 1$ 時，乘積 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$ 有 $n-1$ 個負因子，而 $(-x)^n$ 則帶來 $(-1)^n$，合起來剛好剩下一個負號），所以當 $0 < x < 1$ 時，這個二次式是一個高估值（overestimate）。

第 (i) 部分

取 $x = \frac{1}{100}$，則

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

利用二次近似，

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000 - 400 - 1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

這正是題目所要求的結果。

? **想一想** 第一個被略去的項是 $-\frac{1}{16}x^3$。這就是 $\sqrt{11}$ 的誤差嗎？

不完全是：那是 $\sqrt{1-x}$ 的近似值的誤差，而我們之後還乘上了 $\frac{10}{3}$。因此 $\sqrt{11}$ 的誤差約為

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

所以，準確至 1 位有效數字（significant figure），誤差為 2×10^{-7}，而 $\frac{79\,599}{24\,000}$ 略大於 $\sqrt{11}$。

第 (ii) 部分

我們照搬第 (i) 部分的技巧。由於 $1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$，取 $x = \frac{1}{10\,000}$：

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

於是

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1 - \frac{1}{20\,000} - \frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000 - 40\,000 - 1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

其中最後一步約去了因子 3（799 959 999 的數字之和是 75，可被 3 整除）。

誤差約為第一個被略去的項的 $\frac{100}{3}$ 倍：

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

即大約 2×10^{-12}，符合題目的要求。所以一個合適的有理數是

$$\sqrt{1111} \approx \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000}\left(= \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

驗算

- $79\,599/24\,000 = 3.316625$，而 $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$；兩者相差 2.096×10^{-7}，與估計值 2.08×10^{-7} 吻合，亦印證了這個近似值偏大。
- $266\,653\,333/8\,000\,000 = 33.331666625$，而 $\sqrt{1111} = 33.33166662291\ldots$；我們以高精度準確計算兩者之差，得出 2.0835×10^{-12}。
- 第 (ii) 部分的估計更為準確，因為當 x 較小時，下一個被略去的項 $-\frac{5}{128}x^4$ 相對於 x^3 項也較小。

常見錯誤

- 忘記把被略去的項乘以 $\frac{10}{3}$（或 $\frac{100}{3}$），以致得出的誤差小了十倍或一百倍。
- 弄錯 x^2 係數的正負號：由於是 $(-x)^2$，該項為 $\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$，而不是 $+\frac{1}{8}x^2$。
- 嘗試選取 x 的值，使 $1 - x$ 等於 1111 除以十的某次冪。這樣的值並不小，級數收斂得太慢，根本幫不上忙。

STEP 之外

「誤差大約等於第一個被略去的項」這個說法，可以用泰勒定理（Taylor's theorem）和拉格朗日餘項（Lagrange form of the remainder）嚴格地表述：它給出誤差的準確公式，當中含有一個位於 $(0, x)$ 內的未知點。由此我們可以得到確切的上界和下界（upper and lower bounds），而不僅僅是估計。把這些誤差界嚴格地建立起來，是大學第一門分析（analysis）課程的標準內容；參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。