詳細解答

STEP I 2001，第 9 題

力學 • 攔截與相對速度

> **STEP I 2001，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q9

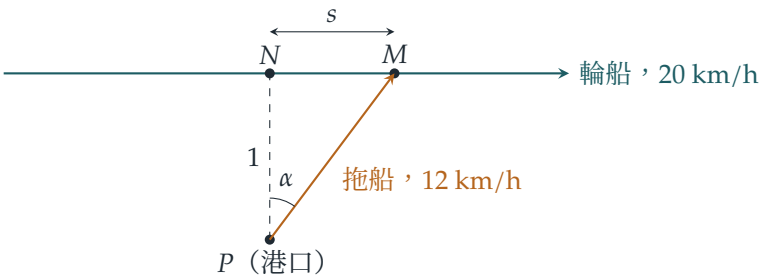
關鍵思路

要盡量遲出發，拖船就必須全速沿直線前進，所以真正要選擇的，只是在輪船航線上的哪一點與它會合。對每一個可能的會合點，先求出拖船最遲可以在甚麼時間出發而仍然及時趕到，然後對會合點求這個出發時間的最大值。只要把問題設定妥當，這就是一個單變量的最優化（optimisation）問題。

解答

建立模型

把輪船和拖船都視為質點（particle）。把港口 P 放在原點，並設輪船沿直線 $y = 1$ 向正 x 方向航行（距離以公里為單位，時間以小時為單位）。由 P 到航線的垂足（foot of the perpendicular）是 $N = (0, 1)$，即輪船最接近港口的一點。



假設兩船在點 $M = (s, 1)$ 會合。輪船沿航線的位置是時間的線性函數（linear function），

所以它到達 M 的時間是

$$t_M = \frac{s-c}{20},$$

其中 c 是一個常數，由輪船的起始位置決定。（輪船仍在駛近，所以 c 小於我們會用到的任何會合位置。）

想一想 為甚麼拖船必須全速沿直線前進？

如果拖船在時間 T 出發，並在時間 t_M 到達 M，它就以不超過 12 km/h 的速率走了至少等於直線距離 $PM = \sqrt{s^2+1}$ 的路程，所以 $t_M - T \geq \sqrt{s^2+1}/12$。以最高速率直駛往 M，等號便成立。任何較慢或較迂迴的走法，都會迫使拖船提早出發。

因此，能夠在 M 會合的最遲出發時間是

$$T(s) = \frac{s-c}{20} - \frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

而我們要求的是 $T(s)$ 在所有 s 之中的最大值。

求出發時間的最大值

求導數（derivative），得

$$T'(s) = \frac{1}{20} - \frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

令 $T'(s) = 0$，得

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

這要求 $s > 0$。兩邊平方，$25s^2 = 9(s^2+1)$，所以 $s^2 = \frac{9}{16}$，$s = \frac{3}{4}$。

這是極大值，而且是全局最大值（global maximum）：$\sqrt{s^2+1}$ 是凸函數（convex function），所以 T（一個線性函數減去一個凸函數）是凹函數（concave function）。換一個說法，$\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ 隨 s 遞增，所以當 $s < \frac{3}{4}$ 時 $T'(s) > 0$，當 $s > \frac{3}{4}$ 時 $T'(s) < 0$。留意常數 c 已經消失：會合點與輪船從哪裏出發無關。

所以拖船在越過 N 之後 $\frac{3}{4}$ 公里處與輪船會合，而它所走的距離是

$$PM = \sqrt{\tfrac{9}{16}+1} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{PM = \tfrac{5}{4} \text{ 公里} = 1.25 \text{ 公里}.}$$

拖船在海上航行 $\frac{5/4}{12} = \frac{5}{48}$ 小時，即 $6\frac{1}{4}$ 分鐘。

幾何解讀

拖船的航向與 PN 成角 α，其中 $\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha$ 正是兩船速率之比 12/20。拖船的速度（velocity）是 $(7.2, 9.6)$，而它相對於輪船的速度是 $(7.2-20, 9.6) = (-12.8, 9.6)$。兩者的點積（dot product）是 $-92.16 + 92.16 = 0$。在臨界出發時間，拖

船的速度與它相對於輪船的速度互相垂直。這是較慢的追趕者僅僅來得及攔截時的標準條件。

驗算

- 以幾個不同的輪船起始位置，在一個細密的會合點網格上作窮舉搜尋，$T(s)$ 的最大值總是出現在 $s = 0.75$，所以拖船所走的距離是 1.25 公里。
- 由最遲出發時間開始，以航向 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 用數值方法逐步模擬運動，拖船會到達輪船所在之處。只要遲 0.002 小時出發，無論取甚麼航向，都不能駛到輪船 20 米以內。
- 合理性檢查：假如拖船與輪船一樣快，$\sin\alpha$ 就會是 1，會合點會跑到無窮遠處。這是合理的，因為速率相同的拖船可以無止境地追着輪船跑。

常見錯誤

- 在輪船最接近港口的一點 N 與它會合（拖船所走的距離為 1 公里）。這樣做是把拖船的距離減至最小，而不是把出發時間推到最遲：拖船向前多走一點，就能賺到時間，因為輪船還要航行一段才到那裏。
- 只把拖船的航行時間 $\sqrt{s^2+1}/12$ 減至最小，而漏掉 $s/20$ 一項。要求最大值的量是出發時間，它同時牽涉兩艘船。

STEP 之外

求到達時間之差的最大值，是最優控制（optimal control）或追逐問題（pursuit problem）的一個小例子。速率之比的條件 $\sin\alpha = 12/20$，與超音速飛機後方的馬赫錐（Mach cone）是同一種幾何：圓錐半頂角的正弦等於音速與飛機速率之比，而這裏那艘慢的拖船，就扮演着聲音追趕快速聲源的角色。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）仔細討論了相對速度（relative velocity）和參考系（frame of reference），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的力學最優化題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。