詳細解答

STEP I 2001，第 8 題

純數學 • 二階線性方程

> **STEP I 2001，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q8

關鍵思路

把每個已知解代入方程，都會在每個 x 值處得到一條聯繫兩個未知函數 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的方程。兩個解便給出兩條聯立線性方程（simultaneous linear equations），我們可以像解兩個未知數那樣把 p 和 q 解出來。在最後一部分，中間部分所證明的線性（linearity）讓我們可以把題目給出的兩個解換成它們較簡單的組合，而三角恆等式（trigonometric identities）令這些組合變得非常簡單。

解答

求 p 和 q

對於 $y = x$，有 $y' = 1$ 及 $y'' = 0$，所以代入 $(*)$ 得

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

對於 $y = 1 - x^2$，有 $y' = -2x$ 及 $y'' = -2$，所以

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

由 (1) 得 $p(x) = -x\,q(x)$。把它代入 (2)，

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

由於 $1 + x^2 > 0$，我們可以相除，所以 $q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$，然後由 (1) 得 $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$，正如題目所求。（我們從沒有除以 x，所以結果對所有實數 x 都成立，包括 $x = 0$。）

任意組合 $ax + b(1 - x^2)$ 都是解

記 $L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$。求導是線性的，所以若 $y = ay_1 + by_2$，其中 a, b 為常數，則

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + b(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

取 $y_1 = x$ 及 $y_2 = 1 - x^2$，則 $L[y_1]$ 和 $L[y_2]$ 都等於零（這正是它們滿足 $(*)$ 的意思），所以對所有常數 a 和 b，都有 $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$。如果你想直接驗證：$y = ax + b(1 - x^2)$ 有 $y' = a - 2bx$ 及 $y'' = -2b$，而

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2(ax + b - bx^2)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

最後一部分

剛才的論證完全沒有用到 p 和 q 的具體形式：對於任何形如 $(*)$ 的方程，兩個解的組合 $ay_1 + by_2$ 仍然是解。所以，如果 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ 和 $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$ 都滿足 $(*)$，它們的和與差也同樣滿足，

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

這裏用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 和 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{2}x^2$。

> ? **想一想** 為甚麼可以用 1 和 $\cos(x^2)$ 來代替題目給出的函數？

因為這一步是可逆的：題目給出的函數是 $\frac{1}{2}(1 + \cos x^2)$ 和 $\frac{1}{2}(1 - \cos x^2)$，所以 p 和 q 使這兩個函數都成為解，當且僅當它們使 1 和 $\cos(x^2)$ 都成為解。我們沒有損失任何資訊，而導數卻容易計算得多。

解 $y = 1$。這時 $y' = y'' = 0$，所以 $(*)$ 簡化為 $q(x) \cdot 1 = 0$，得

$$q(x) = 0.$$

解 $y = \cos(x^2)$。由鏈式法則（chain rule）得 $y' = -2x\sin(x^2)$，再由積法則（product rule）得

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

當 $q = 0$ 時，$(*)$ 變成

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

凡是 $x\sin(x^2) \neq 0$ 之處，我們都可以相除，於是

$$p(x) = -\frac{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)} = -\frac{1}{x} - 2x\cot(x^2).$$

所以 $p(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x\cot(x^2)$ 及 $q(x) = 0$。

在 $x\sin(x^2) = 0$ 的各點（即 $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{n\pi}$），p 的係數為零，所以方程對該處的 p 沒有任何限制；事實上，我們求得的 p 在這些點趨向無窮。這並不是出錯：在這些點上，題目給出的兩個函數的導數都是零，所以它們不可能是一條性質良好、形如 $(*)$ 的方程的兩個「獨立」解，而 p 在該處必定是奇異（singular）的。

驗算

- 作為第一部分的獨立驗算，兩個解的朗斯基行列式（*Wronskian*）$W = y_1y_2' - y_2y_1'$ 滿足 $W' = -pW$。取 $y_1 = x$，$y_2 = 1 - x^2$，得 $W = -2x^2 - (1 - x^2) = -(1 + x^2)$，所以 $-p = W'/W = 2x/(1 + x^2)$，與我們求得的 p 吻合。至於最後一部分，解 1 和 $\cos(x^2)$ 給出 $W = -2x\sin(x^2)$，而同樣有 $W'/W = 1/x + 2x\cot(x^2) = -p$。
- 數值上，在 $x = 0.9$ 處，把題目給出的兩個函數代入 $(*)$，並以有限差分（finite differences）計算導數，可迫使 $p(0.9) \approx -2.82465$ 及 $q(0.9) \approx 0$，與 $-1/0.9 - 1.8\cot(0.81) \approx -2.82465$ 相符。

常見錯誤

- 直接對 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ 求導兩次，結果迷失在繁複的代數運算之中。應先用倍角恆等式（double-angle identities），然後才求導。
- 把 (1) 除以 x 而得到 $q = -p/x$；這樣做是可行的，但之後必須另外處理 $x = 0$ 的情況。改為消去 p 便可避開這個問題。
- 忘記說明最後一部分中 p 的公式在哪些地方成立。

STEP 之外

這道題讓我們一窺二階線性微分方程（second-order linear differential equations）的理論：解構成一個二維向量空間（vector space），任意兩個獨立的解便可決定方程，而朗斯基行列式（連同阿貝爾（Abel）公式 $W' = -pW$）則用來衡量獨立性。朗斯基行列式為零的點，例如本題的 $x = \pm\sqrt{n\pi}$，正是係數必定變得奇異之處。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）對這一切都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。