詳細解答

# STEP I 2001，第 7 題

純數學 • 凹性與微分方程

**STEP I 2001，第 7 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q7

## 關鍵思路

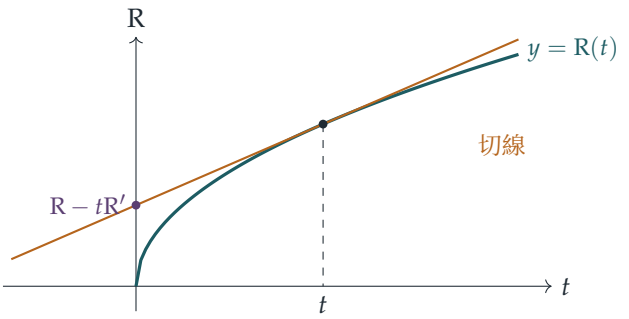
三個條件說明 R 由原點出發、一直上升，並且向下彎曲：它的圖像是凹（concave）的。凹的圖像位於它每一條切線（tangent）的下方，單憑這個幾何事實就可得出 (i) 的不等式。第 (ii) 和 (iii) 部分則是可分離變數的微分方程（separable differential equations），因為 $\mathrm{H} = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$ 正是 $\ln \mathrm{R}$ 的導數。一旦明確求出 R，我們便把它逐一對照各個條件檢驗，而 (i) 的不等式提供了一個快捷的方法來排除某個模型。

## 解答

首先，有一個事實會貫穿全題：由於 $\mathrm{R}(0) = 0$，而且 R 在 $t > 0$ 時嚴格遞增（strictly increasing），所以當 $t > 0$ 時 $\mathrm{R}(t) > 0$。因此當 $t > 0$ 時，$\mathrm{H}(t)$ 有定義，且 $\mathrm{H}(t) > 0$。

### 第 (i) 部分

圖像通過原點，斜率（gradient）為正，而且斜率隨 $t$ 增加而減少。



固定 $t > 0$。圖像在時間 $t$ 處的切線斜率為 $\mathrm{R}'(t)$，所以它與縱軸相交於高度

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

從圖中可見這個截距（intercept）是正數，因為通過原點的曲線位於切線下方。要把這一點說得嚴謹，可對 R 在 $[0, t]$ 上應用中值定理（mean value theorem）：存在某個 $c$ 滿足 $0 < c < t$，使得

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

由於 $\mathrm{R}'' < 0$，函數 $\mathrm{R}'$ 嚴格遞減，而 $c < t$ 給出 $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$。因此

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

這正正就是「切線的截距在原點之上」這句話。兩邊除以 $\mathrm{R}'(t) > 0$，得

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

這就是所要證明的結果。

（等價地說，切線與 $t$ 軸相交於 $t - 1/\mathrm{H}(t)$，而這是負數。在宇宙學（cosmology）中，$1/\mathrm{H}$ 稱為「哈勃時間」（Hubble time），這個結果說明：在任何減速膨脹的模型中，宇宙的年齡都比它的哈勃時間短。）

**第 (ii) 部分**

當 $t > 0$ 時，$\mathrm{R} > 0$，所以可以寫成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

積分後得 $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$，所以

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

其中 $k = \mathrm{e}^C > 0$。

現在利用 $k > 0$ 和 $t^a > 0$ 來檢驗各個條件：

- $\mathrm{R}'(t) = ka\,t^{a-1}$，它在 $t > 0$ 時為正，當且僅當 $a > 0$。
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)\,t^{a-2}$。已知 $a > 0$，它為負當且僅當 $a < 1$。
- 若 $a > 0$，則當 $t \to 0^+$ 時 $kt^a \to 0$，所以與 $\mathrm{R}(0) = 0$ 相容。（若 $a \le 0$，這個條件無論如何都不成立：$kt^a$ 會趨向 $k \neq 0$，或者趨向無限大。）

所以條件 $(*)$ 成立，當且僅當

$$0 < a < 1.$$

這與第 (i) 部分吻合：在那裏 $t < 1/\mathrm{H} = t/a$，由此必有 $a < 1$。

### 第 (iii) 部分

現在 $\mathrm{H}(t) = b/t^2$。首先，當 $t > 0$ 時 $\mathrm{H}(t) > 0$（見開首的說明），所以必須有 $b > 0$。若 $b \le 0$，結論已經成立。

因此假設 $b > 0$。根據第 (i) 部分，每個 $t > 0$ 都必須滿足

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{即} \qquad t > b$$

（兩邊除以 $t > 0$ 並乘以 $b > 0$）。但對於每個滿足 $0 < t \le b$ 的 $t$，這個不等式都不成立。所以沒有任何 $b$ 的值能與 $(*)$ 相容。

**想一想** 這樣使用第 (i) 部分的結果是否合理？

合理。第 (i) 部分證明了*任何*滿足 $(*)$ 的函數，對所有 $t > 0$ 都有 $t < 1/\mathrm{H}(t)$。所以，假如某個建議的 H 哪怕只在一個 $t$ 值上違反這個不等式，就沒有任何具有這個 H 的函數能滿足 $(*)$。這是一個反證法（proof by contradiction）。

若想直接驗證，可仿照 (ii) 解這個方程：$\ln \mathrm{R} = -b/t + C$，所以 $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$，其中 $k > 0$。於是

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$
$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}\,(b - 2t).$$

當 $b > 0$ 時，$\mathrm{R}' > 0$，而且當 $t \to 0^+$ 時 $\mathrm{R}(t) \to 0$，所以頭兩個條件成立。但當 $0 < t < b/2$ 時 $\mathrm{R}''(t) > 0$，所以圖像在原點附近彎向了錯誤的方向，$(*)$ 不成立。

## 驗算

- 在 (ii) 中，取 $a = \frac{1}{2}$ 得 $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$，正是草圖中的形狀：遞增而且是凹的，並有 $t < 1/\mathrm{H} = 2t$。取 $a = 1$ 則得一條通過原點的直線，此時恰好有 $t = 1/\mathrm{H}$：這是 (i) 的邊界情況。
- 在 (iii) 中取 $b = 1$、$k = 1$：數值上 $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$，而 $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$，兩者都違反 $(*)$。

我們用電腦以幾個凹的測試函數檢驗了 (i)，以有限差分（finite differences）檢驗了 (ii) 和 (iii) 中的解及導數公式，並檢驗了 $\mathrm{R}''$ 在 $t = b/2$ 處變號。

## 常見錯誤

- 在 (i) 中，只憑圖像作論證。「曲線位於切線下方」需要理由：中值定理，加上 $\mathrm{R}'$ 遞減。
- 在 (ii) 中，忘記了要有 $a > 0$ 才能保證 $\mathrm{R}' > 0$（以及 $\mathrm{R}(0) = 0$），結果只給出 $a < 1$。
- 在 (iii) 中，聲稱凹性在 $t$ 很大時不成立。$b - 2t$ 的正負號顯示，出問題的地方是在 $t$ 很小的時候。

## STEP 之外

第 (i) 部分是關於凸（convex）函數和凹函數的一個核心事實的特殊情況：一個可微（differentiable）函數是凹的，當且僅當它的圖像位於所有切線的下方。這個事實是詹森不等式（Jensen's inequality）以及最優化（optimisation）中許多理論的基礎。這裏用中值定理的論證，是大學一年級分析學（analysis）的標準內容；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。在真實的宇宙學中，$a = \frac{2}{3}$ 對應由物質主導的愛因斯坦–德西特（Einstein–de Sitter）宇宙，它的年齡是哈勃時間的三分之二。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。