詳細解答

STEP I 2001，第 6 題

純數學 • 旋轉曲面

> **STEP I 2001，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 4.8 節切球形麵包中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/spherical-loaf.html

關鍵思路

把半圓 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 繞 x 軸旋轉，便得到球體。在表面積（surface area）公式中，被積函數（integrand）$y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ 原來是常數，所以任何一片麵包上的麵包皮只取決於該片的厚度，而與它所在的位置無關。至於第二部分，我們從一端開始逐片吃掉（正如提示中的積分上下限 $-a$ 至 $-a + t$ 所暗示），因此剩下的是一個球冠（spherical cap）；比值 V/A 成為球冠厚度的二次函數，我們要求出它的最大值。

解答

麵包皮與片數成正比

設麵包的半徑為 a，中心位於原點，則其表面可由

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

繞 x 軸旋轉而得。求導後，當 $|x| < a$ 時 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$，所以

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

其中用到 $x^2+y^2=a^2$ 及 $y>0$。因此，球體在平面 $x=x_1$ 與 $x=x_2$ 之間（其中 $-a\le x_1<x_2\le a$）的曲面面積為

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2} a\,\mathrm{d}x = 2\pi a\,(x_2-x_1).$$

（被積函數只在端點 $x=\pm a$ 處沒有定義，但在該處仍然有界，所以這個積分沒有問題。）

現在假設麵包被切成 N 片，每片厚度為 $h=2a/N$。每一片無論位於何處，所帶的麵包皮面積都恰好是 $2\pi ah$。所以，如果剩下 n 片，不論它們在甚麼位置，剩餘的麵包皮面積都是

$$A = n\cdot 2\pi ah,$$

它與剩餘的片數 n 成正比。這正是我們要證明的結果。（這是阿基米德（Archimedes）的古老結果：球體與其外切圓柱（circumscribing cylinder）在任意兩個平行平面之間的面積相等。）

「脆皮」條件

麵包是從一端開始逐片吃掉的，所以吃掉若干片之後，剩下的麵包是由 $x=-a$ 至 $x=-a+t$ 的球冠，其中 t 滿足 $0<t\le 2a$。由第一部分可知 $A=2\pi at$。至於體積，作代換 $u=x+a$，使得 $y^2=a^2-x^2=(a-x)(a+x)=(2a-u)u$：

$$V=\pi\int_{-a}^{-a+t}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^t(2au-u^2)\,\mathrm{d}u=\pi\Big(at^2-\frac{t^3}{3}\Big).$$

因此

$$\frac{V}{A}=\frac{\pi t^2\left(a-\frac{t}{3}\right)}{2\pi at}=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6a}=:f(t).$$

? **想一想** 這個比值取決於已經吃掉多少。我們需要留意的是哪一個 t 值？

無論吃掉了多少片，條件都必須成立，所以我們需要 f 的最大值。利用配方法（completing the square），

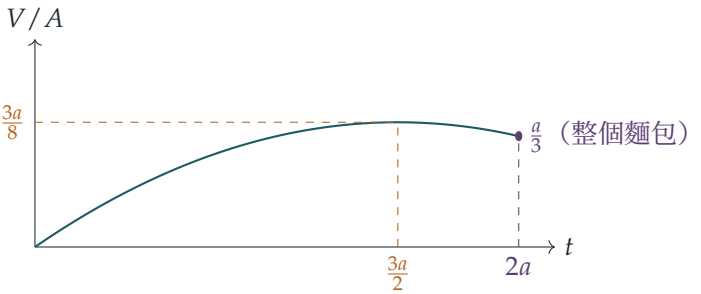
$$f(t)=\frac{3a}{8}-\frac{1}{6a}\Big(t-\frac{3a}{2}\Big)^2,$$

所以 f 在 $t=\frac{3a}{2}$ 時最大（這個值位於 $(0,2a]$ 之內），最大值為 $\frac{3a}{8}$。

$t=\frac{3}{2}a$ 是否真的會出現？會的，例如把麵包切成 4 片並吃掉一片（或切成 $4m$ 片並吃掉 m 片）。一個麵包若要作為平行切片麵包而稱得上「脆皮」，就必須在這樣的切法下符合規定，所以需要

$$\frac{3a}{8}<1,\qquad \text{即}\qquad a<\frac{8}{3}=2\tfrac{2}{3}\text{ 米},$$

正如題目所求。反過來說，若 $a<\frac{8}{3}$，則對每一個 t 都有 $f(t)\le\frac{3a}{8}<1$，所以無論怎樣切片，這個麵包都是「脆皮」的。



上圖顯示 $a = 2$ 時的 $f(t)$：當我們向麵包中央推進時，比值上升，其後回落，因為接近另一端時，我們加入了大量麵包皮，卻只加入少量麵包。

驗算

- 對整個麵包而言，$t = 2a$ 給出 $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$，與 $\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$ 吻合。
- 取 $a = \frac{8}{3}$，切成 4 片。剩下 1, 2, 3, 4 片時，比值分別為 $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$，所以吃掉一片之後比值恰好是 1，剛好不滿足嚴格不等式（strict inequality）。
- 數值上，對面積公式作數值積分（quadrature），所得結果在隨機選取的切片上都與 $2\pi a(x_2 - x_1)$ 相符；而當 $a = 2.66$ 時，切成不多於 200 片的每一種切法，比值都保持在 1 以下。

常見錯誤

- 只考慮整個麵包：$a/3 < 1$ 給出 $a < 3$，這是必要條件，但弱得多。最壞的一刻是麵包寬度的四分之一被吃掉的時候。
- 把平坦的切面也算作麵包皮。麵包皮只是原來的曲面，這也正是題目所給公式所量度的。

STEP 之外

被積函數為常數，這就是阿基米德的帽盒定理（hat-box theorem）：把球面橫向投影到其外切圓柱上，面積保持不變。正因如此，在球面上均勻地選取一點，其高度服從均勻分佈（uniform distribution），這個事實在概率和物理中經常用到。像這樣的曲面積分（surface integral），以及映射在甚麼情況下保持面積，都會在向量微積分（vector calculus）的入門課程中詳細討論；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以幾何直觀講解複分析的著作）對球面的相關映射有一段優美的幾何討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。