詳細解答

# STEP I 2001，第 5 題

純數學 • 積分號下求導

> **STEP I 2001，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q5

## 關鍵思路

(i) 和 (ii) 的兩個積分都可以直接積出，第二個要先作代換（substitution）$u = 1 + tx$。真正的重點在於題末的那句話：(ii) 的被積函數（integrand）是 (i) 的被積函數對 $t$ 的導數（derivative），而兩個答案之間也有同樣的關係。由此看來，在積分號內對參數（parameter）$t$ 求導，似乎可以與對 $x$ 積分交換次序。再做一次，然後代入 $t = 1$，便得到所要的猜想（conjecture）。

## 解答

全題中 $t > 0$ 且 $0 \le x \le 1$，所以 $1 + tx \ge 1 > 0$，各個被積函數都不會趨向無窮大。

### 第 (i) 部分

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+tx)^{-1} = -t(1+tx)^{-2}$，$(1+tx)^{-2}$ 的一個原函數（antiderivative）是 $-\dfrac{1}{t(1+tx)}$（這裏用到 $t \neq 0$）。因此

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

這正是所要證明的結果。

### 第 (ii) 部分

分子中的 $x$ 令直接積分變得不便，所以我們設 $u = 1 + tx$。於是 $x = \dfrac{u-1}{t}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$，而積分上下限 $x = 0, 1$ 變成 $u = 1, 1+t$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\left(u^{-2}-u^{-3}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right).\end{aligned}$$

**想一想** 怎樣才能不必把所有項通分展開，就把括號內的式子化簡？

設 $w = \dfrac{1}{1+t}$，括號內的式子就是 $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$，是一個完全平方（perfect square）。又因為 $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$，所以

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

這就是所求的結果。

### 猜想

把 $x$ 固定，將被積函數看成 $t$ 的函數：

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

所以 (ii) 的被積函數是 (i) 的被積函數對 $t$ 的導數，正如 (ii) 的答案是 (i) 的答案的導數一樣。這提示了以下法則：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

再應用一次，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

於是我們猜想，對於 $t > 0$，

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

代入 $t = 1$，猜想的值為

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

## 驗算

- 當 $t \to 0$ 時，(i) 的被積函數趨向 1，而答案 $\frac{1}{1+t}$ 也趨向 1；在 (ii) 中，被積函數趨向 $-2x$，其積分為 $-1$，與 $-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$ 吻合。
- 題目沒有要求我們驗證這個猜想，但驗證起來很快：設 $u = 1 + x$，積分變成 $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算最後一個積分，得 0.250000；另外取 25 個不同的 $t$ 值，結果都與 $\frac{2}{(1+t)^3}$ 吻合至小數點後九位。

## 常見錯誤

- 在 (ii) 中漏掉由 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$ 而來的因子 $\frac{1}{t}$：這裏共有兩個 $\frac{1}{t}$ 因子，一個來自 $x$，一個來自 $\mathrm{d}x$。
- 代換後沒有把積分上下限改為 $u = 1$ 和 $u = 1 + t$。
- 對 $-(1+t)^{-2}$ 求導時得出 $-2(1+t)^{-3}$：兩個負號互相抵消，所以猜想的值是正數（這也是必然的，因為被積函數是正的）。

## STEP 之外

我們猜想出來的法則，就是積分號下求導（differentiation under the integral sign），又稱萊布尼茲法則（Leibniz's rule）。實分析（real analysis）中有一條定理指出：只要 $f$ 和 $\partial f/\partial t$ 在一個閉矩形上連續（continuous），這條法則便成立；本題中，對於 $0 \le x \le 1$ 以及任何區間 $[a, b]$（其中 $a > 0$）內的 $t$，這個條件都成立。重複同樣的論證，可得對每一個 $n$ 都有 $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$。理查德·費曼（Richard Feynman）曾用這一招計算其他方法都束手無策的積分，並因此為人津津樂道。至於交換極限（limit）、導數與積分次序背後的理論，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。