詳細解答

STEP I 2001，第 4 題

純數學 • 反三角函數方程

> **STEP I 2001，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q4

關鍵思路

三倍角公式（triple-angle formula）可直接由 tan 的複角公式（addition formula）推出。之後，一切都取決於一個事實：tan 以 π 為週期（period）重複，所以若 $\tan 3\varphi = \tan 3\theta$，則 φ 與 θ 可以相差 $\pi/3$ 的任何整數倍。(i) 和 (ii) 真正要下工夫的地方，是留意 $\cos^{-1}$ 和 $\tan^{-1}$ 的值域（range），因為這些值域決定了那無窮多個角之中哪些才是容許的。

解答

三倍角公式

設 $t = \tan\theta$。由複角公式，$\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$，於是

$$\begin{aligned}\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + t}{1 - t\tan 2\theta} &= \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}} \\ &= \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},\end{aligned}$$

其中我們把分子和分母同乘以 $1 - t^2$。這就是所求的公式。（只要等號兩邊都有定義，公式便成立。）

$\tan 3\theta$ 的值

由於 $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$ 且 $0 < \theta < \pi/2$，我們有 $\sin\theta > 0$，所以

$$\sin\theta = \sqrt{1-\tfrac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

（可以想像一個邊長為 1、2、$\sqrt{5}$ 的直角三角形。）代入 $t = \frac{1}{2}$：

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{11/8}{1/4} = \frac{11}{2},$$

正如所求。

稍後會用到 θ 相當小這一點：$\tan\theta = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$，所以 $0 < \theta < \pi/6$，因而 $0 < 3\theta < \pi/2$。

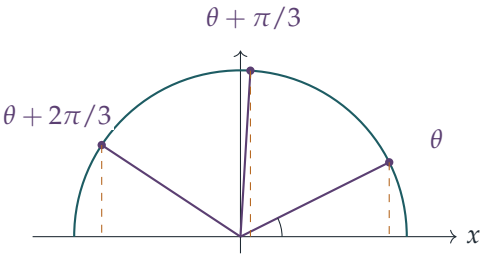
第 (i) 部分

設 $\varphi = \cos^{-1} x$，則 $0 \le \varphi \le \pi$ 且 $x = \cos\varphi$。方程即是說 $\tan 3\varphi = \frac{11}{2} = \tan 3\theta$。因為 tan 的週期為 π，而且在每個長度為 π 的區間上每個值都恰好取一次，

$$3\varphi = 3\theta + k\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi = \theta + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

想一想 這些角之中，實際上有多少個是容許的？

我們需要 $0 \le \varphi \le \pi$。由於 $0 < \theta < \pi/6$，取 $k = 0, 1, 2$ 得 $\varphi = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{3},\ \theta + \frac{2\pi}{3}$，全部都嚴格落在 $(0, \pi)$ 之內；$k = 3$ 給出 $\varphi > \pi$，而 $k = -1$ 給出 $\varphi < 0$。所以恰好有三個解。



x 的三個值就是這些角的餘弦（即各條虛線的垂足）。利用 $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$、$\sin\theta = 1/\sqrt{5}$ 和複角公式：

$$x_1 = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$x_2 = \cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$

$$x_3 = \cos\theta\cos\tfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

這些角都不會令 3φ 成為 $\pi/2$ 的奇數倍（每個 3φ 都是 $3\theta + k\pi$，其中 $0 < 3\theta < \pi/2$），所以 $\tan 3\varphi$ 在每個情況下都有定義。(i) 的解是

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \qquad x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

（有理化（rationalising）後，它們是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$、$\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$ 和 $-\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$。）

另一途徑。把 $T = \tan\varphi$ 代入三倍角公式，得 $2(3T - T^3) = 11(1 - 3T^2)$，即

$$2T^3 - 33T^2 - 6T + 11 = 0.$$

我們知道 $T = \frac{1}{2}$ 是一個根（root），因式分解（factorising）得 $(2T-1)(T^2 - 16T - 11) = 0$，所以 $T = \frac{1}{2}$ 或 $T = 8 \pm 5\sqrt{3}$。於是 $x = \cos\varphi = \pm 1/\sqrt{1+T^2}$，其正負號與 T 相同（T 為正表示 φ 是銳角；為負則表示是鈍角）。這樣得出同樣的三個答案，而且 $1 + (8+5\sqrt{3})^2 = 140 + 80\sqrt{3} = 1/x_2^2$ 也是一個不錯的驗算。

第 (ii) 部分

設 $\psi = \frac{1}{3}\tan^{-1} y$。由於 $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$，我們有 $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$。

> ? **想一想** 條件 $\cos\psi = 2/\sqrt{5}$ 給出一個角還是兩個角？

在 $(-\pi/6, \pi/6)$ 上，cos 是偶函數（even function），所以 $\cos\psi = 2/\sqrt{5} = \cos\theta$ 給出 $\psi = \theta$ 或 $\psi = -\theta$，而且因為 $0 < \theta < \pi/6$，兩者都在容許的範圍內。（再沒有其他解：在 $[0, \pi/6)$ 上，函數 cos 嚴格遞減（strictly decreasing），所以它在該處只取 $2/\sqrt{5}$ 這個值一次，在 $(-\pi/6, 0]$ 上亦然。）

所以 $\tan^{-1} y = \pm 3\theta$。由於 $0 < 3\theta < \pi/2$，$\pm 3\theta$ 兩者確實都是 $\tan^{-1}$ 的值，而

$$y = \tan(\pm 3\theta) = \pm\frac{11}{2}.$$

(ii) 的解是 $y = \frac{11}{2}$ 和 $y = -\frac{11}{2}$。

驗算

- $\theta = \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636$，所以 $3\theta \approx 1.3909$，而 $\tan 3\theta \approx 5.5000$。
- $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \approx 0.05992$ 而 $x_3 \approx -0.83451$；用計算機算得兩者的 $\tan(3\cos^{-1} x) \approx 5.5$，而在 $[-1, 1]$ 上作細密的數值掃描，亦恰好找到三個解。
- $\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}(\pm 5.5)\right) = \cos(\pm 0.4636) \approx 0.8944 = 2/\sqrt{5}$。

常見錯誤

- 在 (i) 中只給出 $x = 2/\sqrt{5}$，忘記了 tan 每隔 π 便重複一次，所以 3φ 在 $[0, 3\pi]$ 內有三個可能的值。
- 在 (ii) 中只給出 $y = 11/2$：cos 是偶函數，所以 $\psi = -\theta$ 同樣成立。
- 沒有檢查範圍：答案取決於 $\theta < \pi/6$，正因如此，$\theta + 2\pi/3$ 在 (i) 中才是容許的，而 3θ 在 (ii) 中才落在 $\tan^{-1}$ 的值域之內。

STEP 之外

反三角函數（inverse trigonometric functions）讓我們初次體會到，要為一個並非一對一（one-to-one）的函數求反函數是怎樣的難題：我們選定一個*主支*（*principal branch*），而這類方程其實是在問我們身處哪一個分支。在複分析（complex analysis）中，$\log z$ 和 $z^{1/3}$ 也會出現同樣的問題：繞原點走一圈，便會由一個分支走到下一個分支，正如這裏把 θ 加上 $2\pi/3$ 一樣。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 以圖像把分支解釋得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。