詳細解答

STEP I 2001，第 3 題

純數學 • 三次方程與判別式

STEP I 2001，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q3

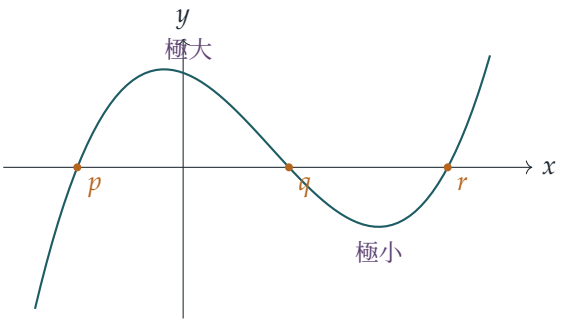
關鍵思路

一個有三個相異實根的三次多項式（cubic），在每兩個相鄰的根之間必定要轉向，所以它的導數（derivative）——一個二次式——有兩個相異實根。把「有兩個相異實根」寫成「判別式（discriminant）為正」，就得到第一個不等式。至於第二部分，題目給出的乘積是一個三次多項式，其係數正好就是目標不等式中的那些量，所以用第一部分的結果（或者配方（completing the square））便可完成。

解答

略圖

展開得 $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$，所以當 $x \to \infty$ 時 $f(x) \to +\infty$，而當 $x \to -\infty$ 時 $f(x) \to -\infty$。圖像只在 p、q 和 r 三處與 x-軸相交，而且由於每個根都是單根（simple root），f 在每個根處都會變號：當 $x < p$ 時 $f < 0$，在 (p,q) 上 $f > 0$，在 (q,r) 上 $f < 0$，當 $x > r$ 時 $f > 0$。因此在 p 與 q 之間某處有一個局部極大值（local maximum），在 q 與 r 之間某處有一個局部極小值（local minimum）。y-截距為 $f(0) = -pqr$。



（圖中是按 $p < 0 < q < r$ 的情況繪畫的；無論各根位於何處，圖像的形狀都一樣，只是 y-軸的位置有所不同。）

第一個不等式

完全展開，得

$$f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (qr+rp+pq)x - pqr,$$

所以

$$f'(x) = 3x^2 - 2(p+q+r)x + (qr+rp+pq).$$

由於 $f(p) = f(q) = 0$，根據羅爾定理（Rolle's theorem），f' 在 p 與 q 之間（不含端點）有一個根；同理，在 q 與 r 之間（不含端點）也有一個根。這兩個區間互不重疊，所以二次方程 $f'(x) = 0$ 有兩個相異實根。（不用羅爾定理的做法：$f'(p) = (p-q)(p-r) > 0$、$f'(q) = (q-p)(q-r) < 0$ 及 $f'(r) = (r-p)(r-q) > 0$，所以 f' 在每個區間上都會變號。）

一個二次式有兩個相異實根，當且僅當它的判別式為正，所以

$$4(p+q+r)^2 - 12(qr+rp+pq) > 0, \qquad \text{即} \qquad (p+q+r)^2 > 3(qr+rp+pq),$$

這正是所要證明的。

第二個不等式

展開得

$$(x^2+gx+h)(x-k) = x^3 + (g-k)x^2 + (h-gk)x - hk.$$

把它與 f 的展開式比較：如果這個三次多項式的根是 p, q, r，則

$$p+q+r = -(g-k), \qquad qr+rp+pq = h-gk,$$

所以目標不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ 正好就是把第一個不等式應用於這個三次多項式的根。

充分（*sufficient*）。假設 $g^2 > 4h$。那麼 $x^2 + gx + h$ 有兩個相異實根 $\alpha < \beta$，而這個三次多項式有實根 α、β、k。如果 k 與兩者都不相同，三個根便互不相同，由第一部分立即得出 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$。

想一想 如果 k 剛好等於 α 或 β，以致各根並非互不相同，那又如何？

第一部分假設了 $p < q < r$，所以我們還需要多做一點工夫。恆等式（identity）

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}[(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2]$$

顯示，除非 $p = q = r$，否則左邊必為正。由於 $\alpha \neq \beta$，三個根絕不會全部相等，所以不等式在這個情況下同樣成立。

另有一個直接的做法，可以完全避開根。乘開得

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2 + gk + k^2 - 3h = (k + \tfrac{1}{2}g)^2 + \tfrac{3}{4}(g^2 - 4h),$$

當 $g^2 > 4h$ 時，這是一個平方加上一個正數，因此為正。無論用哪一個方法，$g^2 > 4h$ 都是充分條件。

非必要（*not necessary*）。我們需要找出滿足 $g^2 \leq 4h$ 而不等式仍然成立的數值。取 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$。那麼 $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$，但是

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

所以即使沒有 $g^2 > 4h$，不等式也可以成立，這個條件並非必要。

想一想 第一部分明明需要三個實根，為甚麼會這樣？

第一部分其實只需要 $f'(x) = 0$ 有兩個相異實根，這個要求較弱。這裏的三次多項式 $(x^2+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ 只有一個實根，但 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$，所以它仍然有兩個駐點（stationary point）。不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ 所說的，正正就是這個三次多項式有一個局部極大值和一個與之不同的局部極小值，不論它的圖像是否與橫軸相交三次。

驗算

- 取 $p, q, r = 0, 1, 2$：$(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$，而 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 的根是 $1 \pm 1/\sqrt{3}$，一個在 $(0,1)$ 內，一個在 $(1,2)$ 內。
- 配方所得的公式顯示，這個不等式的界限是最佳的，不能再改進：取 $g = 2$、$h = 1$（所以 $g^2 = 4h$）及 $k = -1$，得 $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$，是等式而不是嚴格不等式。這就是三次多項式 $(x+1)^3$，三個根全部相等。

- 我們用電腦以精確運算核對了兩個恆等式和兩個不等式，每個各用了 20 000 個隨機有理數例子，另加例子 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$（得出 $4 > 3$）。

常見錯誤

- 把三次曲線上下顛倒地畫：x^3 的係數是 $+1$，所以圖像向右上升。
- 忘記了 k 是 $x^2 + gx + h$ 的根這個情況，這時第一部分不能照原樣套用。
- 只用一個滿足 $g^2 \leq 4h$ 的例子說明不等式成立，就稱之為「充分」。一個例子證明的是*非必要*；要證明充分性，則須對所有 g、h、k 給出證明。

STEP 之外

$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq)$ 這個量，除了相差一個常數因子外，就是導數的判別式，而且它是各根的*對稱函數*（*symmetric function*）：任何這類函數都可以用係數來表示，這就是為甚麼這個不等式可以從根的形式轉寫成 g、h、k 的形式。三次多項式本身的完整判別式 $\prod(p-q)^2$，決定了三個根是否全為實數；本題用的是它較弱的近親。對稱函數和判別式再往前走，就通往伽羅瓦理論（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是一個很好的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。