詳細解答

STEP I 2001，第 2 題

純數學 • 代數不等式

> **STEP I 2001，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

關鍵思路

處理不等式（inequality）時，不能把兩邊同乘一個正負未知的量，所以 (i) 的穩妥做法是把所有項移到同一邊，然後因式分解（factorise）：這樣答案便可從符號圖（sign diagram）直接讀出。在 (ii) 中，平方根會引誘我們把兩邊平方，但這只有在已知兩邊皆非負時才是合理的。全題的關鍵就在於時刻留意這個條件。

解答

第 (i) 部分

我們不能乘以 x，因為 x 可能是負數。我們改為乘以 x^2，由於 $x \neq 0$，它必定嚴格為正，所以不等號方向不變：

$$\begin{aligned} 1+2x-x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2+2x^3-x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4-2x^3-x^2+2x \\ &\iff x\left(x^3-2x^2-x+2\right) < 0. \end{aligned}$$

這個三次式（cubic）可用分組法因式分解：

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

所以我們需要

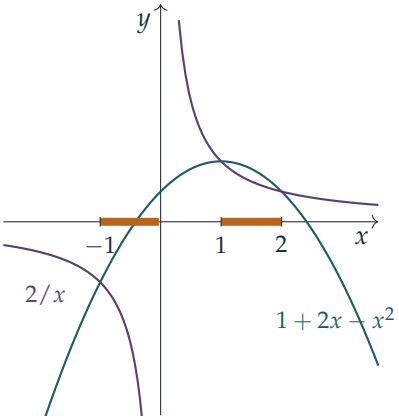
$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

這是一個首項係數（leading coefficient）為正的四次多項式（quartic），有四個單根（simple root）$-1, 0, 1, 2$，所以每當 x 越過一個根，它的正負號便交替一次：當 $x > 2$ 時為正，

在 $(1,2)$ 上為負，在 $(0,1)$ 上為正，在 $(-1,0)$ 上為負，當 $x<-1$ 時為正。在各個根上，其值為 0，並不 <0（而且 $x=0$ 本來就已被排除）。因此

$$\boxed{-1<x<0 \quad \text{或} \quad 1<x<2.}$$

圖像與此吻合：拋物線（parabola）$y=1+2x-x^2$ 位於雙曲線（hyperbola）$y=2/x$ 上方的範圍，恰好由它們在 $x=-1$、1、2 的交點劃分，而在負的一側，則只到雙曲線在 $x=0$ 處急墜至 $-\infty$ 為止。



第 (ii) 部分

首先留意，$x\geq -\frac{10}{3}$ 除了給出 $3x+10\geq 0$ 之外，還給出 $x+4\geq \frac{2}{3}>0$，所以兩個平方根在整個範圍內都有定義。

兩邊皆非負，而對於 $a,b\geq 0$，我們有 $a>b \iff a^2>b^2$。所以我們可以把兩邊平方，既不會多出解，也不會丟失解：

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10}>2+\sqrt{x+4} &\iff 3x+10>4+4\sqrt{x+4}+(x+4)\\ &\iff 2x+2>4\sqrt{x+4}\\ &\iff x+1>2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

想一想 我們可以直接再平方一次嗎？

不能馬上這樣做。右邊的 $2\sqrt{x+4}$ 是正數，但 $x+1$ 可能是負數，這時平方便可能把一個不成立的不等式變成成立的不等式。所以我們要分情況討論。

- 若 $x+1\leq 0$，左邊至多為 0，而右邊嚴格為正。不等式不成立。

- 若 $x+1>0$，兩邊皆為正，所以平方這一步同樣是可逆的：

$$\begin{aligned} x+1>2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1>4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15>0 \\ &\iff (x-5)(x+3)>0, \end{aligned}$$

  這在 $x>5$ 或 $x<-3$ 時成立。結合 $x>-1$，只餘下 $x>5$。

因此

$$\boxed{x>5.}$$

驗算

- 在 $x=5$：$\sqrt{25}=5$ 而 $2+\sqrt{9}=5$，所以該處等號成立，這正是邊界上應有的情況。在 $x=12$：$\sqrt{46}\approx 6.78>2+4=6$。在 $x=0$：$\sqrt{10}\approx 3.16<4$。
- 在 (i) 中，$x=1.5$ 給出 $1.75>1.33$，$x=-0.5$ 給出 $-0.25>-4$，兩者皆成立；$x=0.5$ 給出 $1.75<4$，不成立。
- 我們用電腦對兩個不等式各自在 2×10^5 個隨機點上作了測試，另加上與每個邊界相距不超過 10^{-6} 的點，結果與上述答案完全一致。

常見錯誤

- 把 (i) 乘以 x，卻沒有分開 $x>0$ 和 $x<0$ 兩種情況。這樣會丟失區間 $(-1,0)$，或者把該處的答案弄反。
- 把 $x+1>2\sqrt{x+4}$ 平方，卻沒有要求 $x+1>0$。這樣會得出多餘的區間 $-\frac{10}{3}\le x<-3$；試把 $x=-3.2$ 代入原式，便可看到它並不成立（$\sqrt{0.4}\approx 0.63<2+\sqrt{0.8}$）。

STEP 之外

(ii) 中的原則是：一個運算只有在所涉及的數值上是遞增函數（increasing function）時，才會保持不等式成立。這正是分析學家處理不等式的起點：$t\mapsto t^2$ 在 $[0,\infty)$ 上遞增，但在 $\mathbb{R}$ 上則不然。乘積的符號圖可推廣為以下事實：連續函數（continuous function）只有經過零才能改變正負號，這就是介值定理（intermediate value theorem）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）對這兩點都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。