詳細解答

STEP I 2001，第 14 題

概率與統計 • 隨機排序

STEP I 2001，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q14

本題在 *Beyond STEP* 第 12.12 節何時停止尋找中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/secretary.html

關鍵思路

不要考慮整個面試次序，只需考慮個別候選人排在哪個位置。首 n 人中的最佳者就是全體最佳者，當且僅當最優秀的候選人在首 n 名接受面試的人之中；而根據對稱性（symmetry），最優秀的候選人落在 N 個位置中任何一個的可能性均等。第 (ii) 部分只需多考慮一種情況，或者巧妙地利用補事件（complement）。

解答

按名次為候選人編號：候選人 1 是全體最佳，候選人 2 是第二佳，如此類推。由於全部 $N!$ 種次序的可能性均等，每位候選人佔據任何指定位置的可能性均等，而首 n 場面試所見的候選人組成的集合，是 $\binom{N}{n}$ 個大小為 n 的子集（subset）中任何一個的可能性亦均等。以下一律假設 $1 \le n \le N$。

第 (i) 部分

設 A 為候選人 1 在首 n 名接受面試的人之中這一事件（event）。若 A 發生，候選人 1 必定是首 n 人中的最佳者；若不發生，首 n 人中的最佳者就是比候選人 1 遜色的人。因此我們所求的事件正正就是 A。

候選人 1 落在 N 個位置中每一個的可能性均等，而其中 n 個位置屬於首 n 個，所以

$$\mathrm{P}(\text{首}n\text{ 人中的最佳者是全體最佳}) = \frac{n}{N}.$$

第 (ii) 部分

現在取 $N \geq 2$，使第二佳的候選人存在。首 n 人中的最佳者是全體最佳或第二佳，當且僅當

- 候選人 1 在首 n 人之中（事件 A），或
- 候選人 1 不在首 n 人之中，但候選人 2 在。

> **想一想** 在第二種情況中，我們怎樣知道首 n 人中的最佳者是候選人 2，而不是更優秀的人？

比候選人 2 優秀的只有候選人 1，而在這種情況下他並不在較早接受面試的人之中。反過來說，若 1 和 2 都不在首 n 人之中，則首 n 人中的最佳者名次為 3 或以下。所以上述兩種情況合起來正正就是我們所求的事件，而且兩者互斥（mutually exclusive）。

由第 (i) 部分，第一種情況的概率為 $\frac{n}{N}$。至於第二種情況，$\mathrm{P}(A') = \frac{N-n}{N}$，而已知候選人 1 在最後 $N-n$ 個位置的其中之一時，候選人 2 落在餘下 $N-1$ 個位置中任何一個的可能性均等，其中 n 個屬於首 n 個位置。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{首}n\text{ 人中的最佳者是全體第一或第二}) &= \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N}\cdot\frac{n}{N-1}\\ &= \frac{n\big[(N-1)+(N-n)\big]}{N(N-1)}\\ &= \frac{n(2N-n-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

*另一方法*是利用補事件：所求事件不發生，當且僅當較早接受面試的 n 名候選人全部來自名次為 3 至 N 的 $N-2$ 名候選人，其概率為

$$\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)},$$

而 $N(N-1)-(N-n)(N-n-1) = 2Nn-n^2-n = n(2N-n-1)$，得出相同的答案。

$N=4$、$n=2$ 的情況

按公式，(i) 的答案是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，(ii) 的答案是 $\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3} = \frac{5}{6}$。

要列出各種可能性，留意到重要的只是哪兩名候選人最先接受面試。$\binom{4}{2} = 6$ 個組合中

的每一個，都恰好由 $2! \times 2! = 4$ 種次序產生（全部共 24 種次序；先排好首兩人，再排好後兩人），所以這六個組合的可能性均等：

最先接受面試的兩人	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
其中的最佳者	1	1	1	2	2	3

首兩人中的最佳者是全體最佳的情況佔 3 種（共 6 種），概率為 $\frac{1}{2}$；是全體最佳或第二佳的情況佔 5 種（共 6 種），概率為 $\frac{5}{6}$。兩者都與公式吻合。

驗算

- $n = N$：我們見過所有人，所以兩個概率都應該是 1。果然 $\frac{N}{N} = 1$ 而 $\frac{N(N-1)}{N(N-1)} = 1$。
- $n = 1$：第一名候選人是均勻隨機選出的一人，所以 (ii) 的答案應該是 $\frac{2}{N}$；公式給出 $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$。
- (ii) 的答案不小於 (i) 的答案，因為 $2N - n - 1 \geq N - 1$。
- 把全部 $N!$ 種次序逐一列舉，對 $N \leq 7$ 及每個 n 的結果都與兩條公式完全吻合（例如 $N = 5$、$n = 2$ 給出 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{7}{10}$）。

常見錯誤

- 在 (ii) 中忘記了「全體第二佳」只在全體最佳者*不*在首 n 人之中時才算數；直接把 $\frac{n}{N} + \frac{n}{N}$ 相加會重複計算。
- 以候選人 1 的位置為條件（conditioning）之後，仍對候選人 2 使用 $\frac{n}{N}$：候選人 1 的位置一旦確定，就只剩下 $N - 1$ 個位置。

STEP 之外

這正是著名的*秘書問題*（secretary problem）的設定：假如你必須即場決定取錄或拒絕每名候選人，最佳策略是先觀察首 n 人，然後取錄其後第一名比他們全部都優秀的候選人；把第 (i) 部分的論證加以推廣，可以證明最優的 n 大約是 N/e，成功的概率約為 $1/e$。這裏所用的對稱性論證（「每名候選人落在任何位置的可能性均等」）是研究隨機排列（random permutation）的起點。Blitzstein and Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教科書）對這類對稱性論證有十分精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。