詳細解答

STEP I 2001，第 13 題

概率與統計 • 條件泊松分佈

STEP I 2001，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q13

關鍵思路

以打破碟子的總數作為條件，便可把一道泊松（Poisson）問題化為二項（binomial）問題。假如四名學生各自獨立地以相同的比率打破碟子，那麼一旦知道總共打破了多少隻碟子，每一隻破碟由四人中任何一人打破的可能性都相等，而且與其他破碟互相獨立。因此，數學家在破碟中所佔的數目服從二項分佈，而未知的 λ 亦隨之消失。

解答

設定

設 M 為數學家打破的碟子數目，R 為其餘三名學生打破的碟子總數。題目指出每名學生打破的碟子數目均服從 $\mathrm{Po}(\lambda)$，且彼此獨立。所以 $M \sim \mathrm{Po}(\lambda)$，而 R 是三個獨立的 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 變量之和，故服從 $\mathrm{Po}(3\lambda)$。此外，M 與 R 獨立（independent），因為 R 只取決於其餘三名學生。總數為 $T = M + R \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$。

? **想一想** 為甚麼獨立泊松變量之和仍然服從泊松分佈？

對於獨立的 $X \sim \mathrm{Po}(\alpha)$ 和 $Y \sim \mathrm{Po}(\beta)$，就 n 的各種拆分方式求和：

$$\mathrm{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\beta}\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^n}{n!},$$

最後一步用了二項式定理（binomial theorem）。所以 $X + Y \sim \mathrm{Po}(\alpha+\beta)$。應用這個結果兩次，得 $R \sim \mathrm{Po}(3\lambda)$；再應用一次，得 $T \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$。

M 的條件分佈

對於 $m = 0, 1, \ldots, 5$，事件 $\{M = m,\ T = 5\}$ 與 $\{M = m,\ R = 5 - m\}$ 相同。由於 M 與 R 獨立，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M = m \mid T = 5) &= \frac{\mathrm{P}(M = m)\,\mathrm{P}(R = 5 - m)}{\mathrm{P}(T = 5)} \\ &= \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-3\lambda}(3\lambda)^{5-m}}{(5-m)!}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-4\lambda}(4\lambda)^5}{5!}} \\ &= \frac{5!}{m!\,(5-m)!} \cdot \frac{3^{5-m}}{4^5} = \binom{5}{m}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^{5-m}.\end{aligned}$$

指數項互相約去，λ 的所有冪次也一樣（分子和分母各有 λ^5）。所以，在 $T = 5$ 的條件下，不論 λ 取甚麼值，都有 $M \sim \mathrm{B}(5, \frac{1}{4})$。

答案

把 $m = 3, 4, 5$ 的二項概率相加：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5) &= \binom{5}{3}\frac{3^2}{4^5} + \binom{5}{4}\frac{3}{4^5} + \binom{5}{5}\frac{1}{4^5} \\ &= \frac{10 \times 9 + 5 \times 3 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}.\end{aligned}$$

所以，五隻破碟之中有三隻或以上由數學家打破的概率是 $\dfrac{53}{512} \approx 0.104$。

驗算

- 六個條件概率（conditional probability）$\binom{5}{m}3^{5-m}/4^5$ 之和為 $(1+3)^5/4^5 = 1$，正如所料。
- 對稱性：按同樣的論證，每名學生在五隻破碟中所佔數目的期望值（expected value）為 $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$，而四人所佔數目之和為 5。
- 我們直接由四個泊松分佈計算 $\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5)$（就五隻破碟在四名學生之間的每一種分配方式求和），取 $\lambda = 0.3, 1, 2.7$ 和 5，每次都得到 $0.103515625 = 53/512$。另外模擬了 4×10^5 輪洗碗，在恰好打破五隻碟子的各輪之中，所得比例約為 0.105。

常見錯誤

- 答案中仍留有 λ。它必定會約去；如果約不去，就表示取條件的步驟出了錯。

- 除以 $\mathrm{P}(M+R=5)$ 時，把 R 當作 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 而不是 $\mathrm{Po}(3\lambda)$，這等於只有兩名學生。
- 漏掉二項式係數，或把事件當作「恰好三隻」而不是「三隻或以上」。

STEP 之外

這是一個一般事實的小例子：若 $X_1,\ldots,X_k$ 是獨立的泊松變量，平均值分別為 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$，則在它們的和為 n 的條件下，向量 $(X_1,\ldots,X_k)$ 服從多項分佈（multinomial distribution），其概率為 $\lambda_i/\sum\lambda_j$。反過來看，這個事實說明：若事件的數目服從 $\mathrm{Po}(\mu)$，而每個事件各自獨立地標記為 k 種類型之一，則各類型的數目是互相獨立的泊松變量。這種「泊松分拆」（Poisson splitting）是研究泊松過程（Poisson process）的基本工具。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）以大量例子討論了這兩個方向。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。