詳細解答

STEP I 2001，第 12 題

概率與統計 • 樹形圖

STEP I 2001，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q12

關鍵思路

一切取決於仔細記錄誰知道甚麼。一名學生要知道某人已聽過謠言，只有兩種情況：那人把謠言告訴了他，或者他把謠言告訴了那人；沒有人會透露自己是從誰那裏聽來的。只要記下每名學生在每個階段所知道的事，樹形圖（tree diagram）其實很小：每次分支都是在兩個人之間選擇，所以只有八條路徑，而且結果它們的可能性全部相等。

解答

設定

以 A、B、C、D 表示四名學生。在任何階段，學生 X 知道已聽過謠言的人包括：X 自己、曾把謠言告訴 X 的人，以及 X 曾把謠言告訴的人。當 X 聽到謠言時，X 會在這個集合以外的人當中均勻隨機（uniformly at random）地選一人。如果這個集合已包含全部四名學生，謠言便在 X 處停止。

開始時，A 已告訴 C，所以 A 知道 $\{A, C\}$，而 C 知道 $\{A, C\}$。

樹形圖

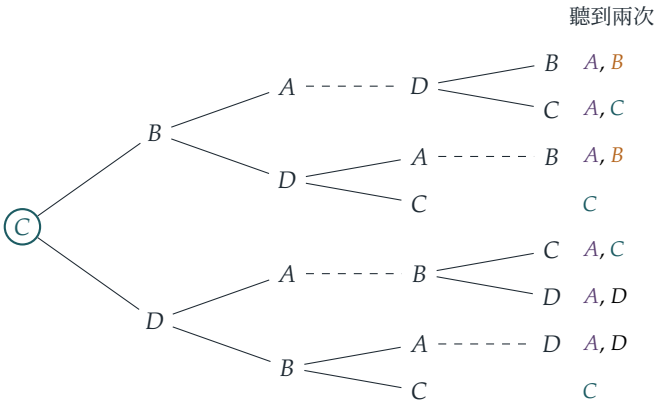
C 會略過 A，告訴 B 或 D，概率（probability）各為 $\frac{1}{2}$。先看分支 $C \to B$。這時 C 知道 $\{A, B, C\}$，而 B 知道 $\{B, C\}$（不包括 A，因為 C 沒有說謠言從何而來）。所以 B 會告訴 A 或 D，概率各為 $\frac{1}{2}$。

- $B \to A$。Arthur 現在知道 $\{A, B, C\}$，所以他必須告訴 D，之後 Arthur 便知道人人都已聽過。D 只知道 $\{A, D\}$，所以 D 會告訴 B 或 C，概率各為 $\frac{1}{2}$。無論是哪一個，

聽者的集合都會齊全：B 本來已知道 $\{A, B, C\}$，C 亦然，而兩人此時都得知 D 已聽過。於是謠言停止。

- $B \to D$。這時 B 知道 $\{B, C, D\}$，而 D 知道 $\{B, D\}$，所以 D 會告訴 A 或 C。
  - $D \to C$：C 本來已知道 $\{A, B, C\}$，現在又得知 D 已聽過，所以謠言停止。Arthur 始終沒有再次聽到謠言。
  - $D \to A$：Arthur 知道 $\{A, C, D\}$，所以他告訴 B，後者隨即知道四人都已聽過。謠言停止。

分支 $C \to D$ 的情況相同，只是 B 與 D 的角色互換。以下是整個樹形圖。除了以虛線表示的必然步驟（概率為 1）外，每條分支的概率都是 $\frac{1}{2}$。



每條通往樹葉的路徑都恰好包含三次概率為 $\frac{1}{2}$ 的選擇（必然步驟只貢獻因子 1），所以八個結果的概率各為 $\frac{1}{8}$。右方的標記顯示在該路徑上誰聽到謠言兩次。（在每條路徑上，一名學生最多聽到兩次。）

想一想 為甚麼 B 剛從 C 那裏聽到謠言，卻不知道 Arthur 已聽過？

因為 C 不會說是誰告訴自己的。B 所能推斷的，只是 C 已聽過謠言。正是這一點令謠言得以繼續流傳：在 $C \to B \to A$ 這條分支上，Arthur 被告知一件他早已知道的事。

Arthur 再次聽到謠言

除了兩條短路徑 $C \to B \to D \to C$ 和 $C \to D \to B \to C$ 之外，Arthur 在每條路徑上都會再次聽到謠言。所以

$$\mathrm{P}(\text{Arthur 再次聽到謠言}) = 1 - 2 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4},$$

正如所求。

Bertha 與 Chandra

Bertha 只在路徑 $C \to B \to A \to D \to B$ 和 $C \to B \to D \to A \to B$ 上聽到兩次，所以

$$\mathrm{P}(\text{Bertha 聽到兩次}) = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

Chandra 在四條路徑上聽到兩次：樹形圖的上下兩半各有兩條（$C \to B \to A \to D \to C$、$C \to B \to D \to C$、$C \to D \to A \to B \to C$ 和 $C \to D \to B \to C$），所以

$$\mathrm{P}(\text{Chandra 聽到兩次}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

Chandra 比 Bertha 更有可能再次聽到謠言，是因為 Chandra 很早便聽到：在傳話鏈中較後才被告知的人並不知道 Chandra 已聽過，所以直到最後 Chandra 仍然是可能被告知的對象。

驗算

根據 B 與 D 之間的對稱性（symmetry），Delilah 聽到兩次的概率也應是 $\frac{1}{4}$，而樹形圖中確有兩條這樣的路徑。各結果的概率之和正確：八片等可能的樹葉，總概率為 1。以電腦對整個過程作精確枚舉，得出 $\frac{3}{4}$、$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$；而模擬（simulation）200 000 次謠言傳播，則得出 0.750、0.250 和 0.501。

常見錯誤

- 讓聽者知道傳話鏈中更早的每一個人。其實傳遞下去的只有告知者的身分；假如人人都掌握全部資訊，謠言便永遠不會回到 Arthur 那裏。
- 忘記告知者同樣會得知一些事情：告訴 Y 之後，X 便知道 Y 已聽過謠言，而 Arthur 的步驟之所以是必然的，正是這個緣故。
- Arthur 一再次聽到謠言便把樹形圖停下。其後的分支對 Bertha 和 Chandra 的計算是必需的。

STEP 之外

這個謠言是四名學生之間的一個隨機漫步（random walk），其規則取決於過往歷史，而這裏以每名學生所知道的事來記錄歷史。只要把狀態設定得足夠豐富，使下一步只取決於當前狀態，它便成為一條馬可夫鏈（Markov chain），亦即隨機過程（random processes）入門課程的核心對象；謠言模型和傳染病模型是它的經典應用。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率論入門）對馬可夫鏈的講解，程度恰到好處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。