詳細解答

STEP I 2001，第 11 題

力學 • 彈性繩與能量

STEP I 2001，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

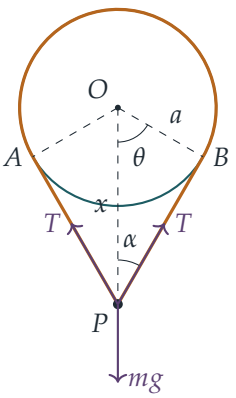
step.maths.org/questions/01-s1-q11

關鍵思路

質點把彈性帶向下拉之後，彈性帶大部分長度仍然貼在圓柱上，並在兩側沿切線方向離開圓柱，再筆直地連到質點。因此，整個問題歸結為由圓外一點向圓所作兩條切線（tangent）的幾何。由於圓柱是光滑的，彈性帶上各處的張力（tension）都相同，所以用總伸長量（extension）代入胡克定律（Hooke's law）便可求得張力。之後，第 (i) 部分是能量問題（質點在最低點瞬時靜止），第 (ii) 部分是力的問題（速率最大即加速度為零）。

解答

我們把質點視為點質量，把彈性帶視為輕而有彈性（遵從胡克定律），並把圓柱視為光滑。設 O 為橫截面的圓心，並設質點 P 位於 O 下方距離 x 處，其中 $x \geq a$。彈性帶在 A 和 B 兩點離開圓，其中 PA 和 PB 為切線。



幾何關係與張力

三角形 OAP 在 A 處為直角（切線垂直於半徑），所以

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

其中 $\theta = \angle AOP$，而 $\alpha = \angle APO$，即每段筆直的彈性帶與鉛垂線所成的角。除了最接近 P 的一段圓心角為 2θ 的弧 AB 之外，彈性帶處處與圓接觸，所以它的長度是

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

自然長度（natural length）為 $2\pi a$，所以伸長量是

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

由於圓柱是光滑的，沿彈性帶方向沒有摩擦力，所以張力 T 處處相同，而根據胡克定律，$T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$。

當 $x = 2a$ 時，我們有 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$，$\alpha = \frac{\pi}{6}$，而 $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$。因此

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

第 (i) 部分

釋放時，質點位於圓柱的底部，即 $x = a$，彈性帶未被拉長，質點處於靜止。到了 $x = 2a$，質點再次靜止（它不再往下掉），所以在這兩個時刻它都沒有動能（kinetic energy）。圓柱是光滑的，所以沒有能量損失，重力勢能（gravitational potential energy）的減少等於彈性勢能（elastic energy）的增加。質點下降了距離 $2a - a = a$，而自然長度為 $2\pi a$、伸長量為 e 的彈性帶，其彈性勢能為 $\dfrac{\lambda e^2}{2 \cdot 2\pi a}$。所以

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a} \cdot \frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2}{9\pi},$$

由此得

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2},$$

正如所求。

想一想 彈性帶有一部分繞在圓柱上，對整條彈性帶使用彈性勢能公式，這樣做合理嗎？

合理。由於圓柱是光滑的，無論是否繞在圓柱上，整條彈性帶的張力都相同，因而每單位長度的伸長也相同。彈性帶的表現，與一條自然長度為 $2\pi a$、總伸長量為 e 的彈性繩完全一樣，而這正是公式 $\lambda e^2/(2l)$ 所描述的情況。

第 (ii) 部分

加速度為零時，速率最大，也就是說，作用於質點的合力為零。在水平方向，兩個張力因對稱而互相抵消。在 P 處沿鉛垂方向分解，

$$2T\cos\alpha = mg.$$

當 $x = 2a$ 時，$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sqrt{3}\,T = mg$，得 $T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$。利用胡克定律和上面求得的伸長量，

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a}\cdot\frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

令 T 的兩個表達式相等，

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

想一想 我們怎樣知道這是速率的極大值，而不僅僅是一個駐點？

當 x 增加時，e 會增加（每段筆直的彈性帶變長的速度，比弧長 $a\theta$ 縮短的速度快），而 $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$ 也會增加，所以向上的力 $2T\cos\alpha$ 由 0 開始持續增加。質點在 $x = 2a$ 上方時，向下的合力為正，在其下方時則為負，所以質點一直加速至 $x = 2a$，之後便減速。

驗算

- 一個巧妙的一致性檢驗：對 L 求導，得 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$。所以彈性勢能的變化率 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ 等於 $2T\cos\alpha$，即向上的力。(i) 的能量方法與 (ii) 的力學方法互相吻合。
- 以數值計算，(i) 中 $\lambda \approx 6.70\,mg$，(ii) 中 $\lambda \approx 2.65\,mg$。(ii) 中的彈性帶較弱，這是合理的：在那裏質點到達 $x = 2a$ 時仍在運動，並會繼續越過該點，而在 (i) 中，較硬的彈性帶已經令質點停下來。
- 由 $x = a$ 處的靜止狀態出發，以數值方法逐步求解運動方程 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$，取 λ 的第一個值時，最低點在 $x = 2.0000a$；取第二個值時，速率最大的位置在 $x = 2.0000a$。

常見錯誤

- 忘記了有一部分彈性帶離開了圓柱：伸長量是 $2\sqrt{x^2 - a^2}$ 減去失去的弧長 $2a\theta$，而不僅僅是兩段筆直部分的長度。
- 由軸線而非釋放點起量度下降的距離：質點下降的距離是 a，而不是 $2a$。
- 沿鉛垂方向分解時，用了 $\sin\alpha$ 而不是 $\cos\alpha$；α 是由鉛垂線起量度的，而 $\sin\alpha = a/x$。

STEP 之外

驗算 d(彈性勢能)/dx 等於回復力，其實是虛功原理（principle of virtual work）的一個例子：在保守系統（conservative system）中，任何方向上的力，等於勢能沿該方向的變化率的負值。這種以一個坐標及其勢能來描述系統的觀點，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點，你會在大學力學課程的第一或第二年遇到它。若想看對能量、力和勢的嚴謹論述，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。