詳細解答

STEP I 2001，第 10 題

力學 • 拋體的飛行時間

> **STEP I 2001，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q10

關鍵思路

把選擇分成兩部分：仰角決定了飛行時間和水平射程，而方向只決定炮彈落在以炮為圓心的圓上的哪一點。因此，炮彈能擊中直線，當且僅當其射程至少為 d。飛行時間隨仰角增大而增加，但仰角超過 $45°$ 後，射程會縮短，所以我們把仰角一直調高，直到射程剛好降至 d 為止。

解答

給定仰角時的飛行時間與射程

把炮彈當作只受重力作用的質點（particle）（不計空氣阻力），由地面發射，並落在平原上。設發射的仰角（elevation）為 α，其中 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$。它的垂直速度分量是 $v\sin\alpha$，水平分量是 $v\cos\alpha$。

在垂直方向，經過時間 t 後它的高度是 $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$，而高度再次為零的時刻是

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

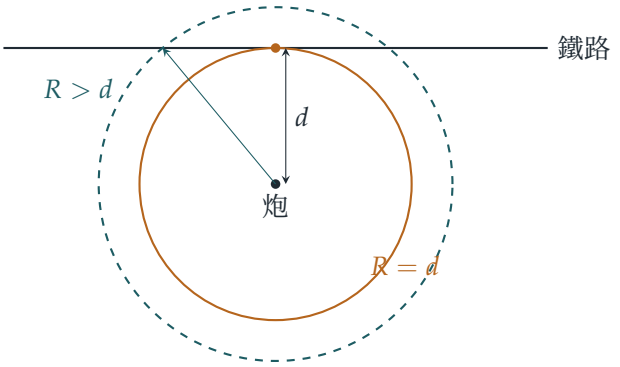
在這段時間內，它走過的水平距離是

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

炮彈何時能擊中直線？

仰角固定時，轉動炮身會使落點沿着一個以炮為圓心、半徑為 R 的圓移動。直線上最近的一點與炮的距離為 d，而直線上其他各點都更遠。所以這個圓與直線相交，當且僅當

$R \geq d$。當 $R = d$ 時，圓剛好與直線相切，炮必須正對着最近的那一點，即與直線垂直。



（俯視圖。虛線圓對應較低的仰角，它在兩點到達直線。實線圓對應最優的仰角，它剛好到達直線。）

所以炮手以仰角 α 發射時能擊中直線，當且僅當

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

記 $k = gd/v^2$。題目告訴我們 $v^2 > gd$，所以 $0 < k < 1$，確實有一些仰角可行。（最大射程是 v^2/g，在 45° 時取得，所以這個條件只是說直線在射程之內。）

使飛行時間最大

由於 $T = 2v \sin\alpha / g$，而 $\sin\alpha$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上是遞增的，要使 T 最大，就要選取容許範圍內最大的 α。

當 $0 < 2\alpha \leq \pi$ 時，條件 $\sin 2\alpha \geq k$ 成立，當且僅當

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

所以容許的最大仰角是 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$，它大於 45°。在這個仰角下 $\sin 2\alpha = k$，而由於 2α 位於 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之內，$\cos 2\alpha$ 是負數：

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

想一想 沿着直線瞄準遠處某一點，讓炮彈飛得更遠，不是更好嗎？

不是。飛得更遠需要更大的射程，而在 45° 以上，這意味着更低的仰角，飛行時間因而更短。飛行時間只取決於仰角，所以我們能做到的最好結果，就是仍能到達直線的最陡一擊。它的射程剛好是 d，所以炮彈落在由炮到直線的垂足上。

現在把 T 平方，並利用 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$：

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中把 v^2 移入了平方根之內（因為 $v^2 > 0$，這是容許的）。這就是所要求的結果。

驗算

- 當 $d \to 0$ 時，公式給出 $g^2T^2 \to 4v^2$，所以 $T \to 2v/g$。這相當於垂直向上發射，是最長的飛行時間；當直線緊貼着炮經過時，這正是應有的結果。
- 當 $v^2 = gd$ 時，直線僅僅在射程之內：唯一可行的是以 $45°$ 發射，而公式給出 $g^2T^2 = 2v^2$，與 $T = 2v\sin 45°/g = \sqrt{2}\,v/g$ 吻合。
- 以數值計算，取 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 100\,\mathrm{m}$ 和 $v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，最佳仰角約為 $71.1°$，公式給出 $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$。以數值方法逐步模擬運動，得到相同的時間，炮彈亦落在直線上。對所有仰角作窮舉搜尋，在數百個隨機例子中都與公式一致。

常見錯誤

- 取了較小的根 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$。這樣發射同樣能擊中直線，但得到的是最短而不是最長的飛行時間：實際上就是取錯了 $\cos 2\alpha$ 的正負號。
- 一開始就假設炮彈必定落在直線上最近的一點。這個結論最終是對的，但需要上面的論證：其他任何一點都需要更大的射程，因而需要更低的仰角。

STEP 之外

這是一個小型的約束最優化（constrained optimisation）問題：在某個約束條件（到達直線）之下，使某個量（飛行時間）最大，而最優解位於容許範圍的邊界上。在大學一年級的力學和最優化課程中，你會遇到處理這類問題的一般工具，例如拉格朗日乘數（Lagrange multipliers），以及與之相關的概念：所有軌跡的包絡線（envelope）（即「安全拋物線」（parabola of safety）），它圍住了炮所能到達的每一點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是深入學習拋體與質點力學的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。