詳細解答

STEP I 2001，第 1 題

純數學 • 幾何不等式

STEP I 2001，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q1

關鍵思路

三點分別位於正方形的三條不同邊上，其中必有兩點落在一對對邊上，而第三條邊則連接這兩條對邊。為正方形設立坐標（coordinates），使每一點只有一個介乎 0 與 1 之間的自由參數（parameter）。然後用反證法（proof by contradiction）：假如三角形的三條邊都比該上界長，每一個長度條件都會收緊其中一個參數的範圍，而這些限制合起來，便會把其中一點推出正方形之外。

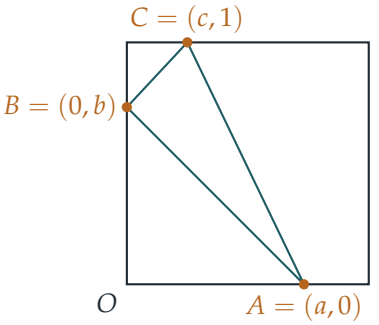
解答

以厘米為單位。正方形有四條邊，而三點位於不同的邊上，即這些點恰好不在正方形的其中一條邊上，所以其中兩點位於一對對邊上，而第三點則位於與這兩條邊都相鄰的一條邊上。選取坐標軸，使正方形為 $0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$，並且

$$A = (a, 0) \text{ 在底邊}, \qquad B = (0, b) \text{ 在左邊}, \qquad C = (c, 1) \text{ 在頂邊},$$

其中 $a, b, c \in [0, 1]$。（把正方形旋轉或反射並不會改變任何長度，所以這樣做不失一般性（without loss of generality）。）於是

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1 - b)^2, \qquad CA^2 = (c - a)^2 + 1.$$



設 $k = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 及 $t = 2 - \sqrt{3}$。以下兩個小結果能讓數字變得容易處理：

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{所以} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

此外 $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$，所以 $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$，因此

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

假設三角形的三條邊都比 k 長，以求得出矛盾。把正方形沿直線 $y = \frac{1}{2}$ 反射（這會把 A 與 C 的角色對調，亦把 a 與 c 對調），由這個對稱性（symmetry），我們可以假設 $c \geq a$。

由 $BC > k$ 出發。由於 $c \leq 1$，

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

所以 $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$。因為 $1 - b \geq 0$ 及 $t > 0$，由此得 $1 - b > t$，即 $0 \leq b < 1 - t$。

由 $AB > k$ 出發。由於 $0 \leq b < 1 - t$，我們有 $b^2 < (1 - t)^2$，所以

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

因為 $a \geq 0$，由此得 $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$。

想一想 我們已經限定了 a 的範圍；第三條邊 CA 又會帶來甚麼？

邊 CA 由底至頂橫越整個正方形，所以它在垂直方向的跨度為 1，其餘的長度必須靠水平方向補足。

由 $CA > k$ 出發。我們有 $(c - a)^2 + 1 > k^2$，所以 $(c - a)^2 > t^2$，而由於 $c \geq a$，這表示 $c - a > t$。因此

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

但 C 位於頂邊上，所以 $c \leq 1$。這個矛盾說明三條邊不可能全都比 k 長：三角形 ABC 至少有一條邊的長度不超過 $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm，這正是所要證明的。

這個上界可以達到

當 $c = 1$ 及 $a = b = \sqrt{3} - 1$，即 $A = (\sqrt{3} - 1, 0)$、$B = (0, \sqrt{3} - 1)$、$C = (1, 1)$ 時，上面每一個不等式（inequality）都取到臨界情況。這時

$$AB^2 = 2(\sqrt{3} - 1)^2 = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3},$$

所以 ABC 是等邊三角形（equilateral triangle），邊長恰好為 k（C 位於角上，算作在頂邊上）。因此 $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ 是最佳的常數。用三角學的說法，$k = \sec 15°$：這是能放進單位正方形內的最大等邊三角形，與各邊傾斜成 15°。

驗算

- $k = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.0353$ 比正方形的邊長稍大，這是合理的：若三角形的三個頂點分別在三條邊上，它的三條邊可以全都比 1 長，但只能長一點點。
- 在 2×10^6 組隨機選取的 $(a, b, c) \in [0, 1]^3$ 中搜尋，最短邊從未超過 1.0337，低於 k；而上述等邊三角形的例子，三條邊在機器精度內均等於 1.03528。
- $\sec 15° = 4/(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，與等邊三角形的情況吻合。

常見錯誤

- 未經證明便假設三角形是等邊的，或假設其中一個頂點在角上。極端情況能提示答案，卻不能證明不等式對所有情況都成立。
- 忘記說明設定的理由：關鍵的結構性事實是，三條不同的邊之中必定包含一對對邊。
- 對 $(1 - b)^2 > t^2$ 或 $(c - a)^2 > t^2$ 開平方時，沒有說明所取的是哪一個正負號。

STEP 之外

這是一個小型的極大極小（max–min）問題：我們要在一個由各種情況組成的緊緻集（compact set）上，使最短邊盡量長，而極端情況會令所有約束條件同時取等號，這種模式在最優化（optimisation）和博弈論（game theory）中隨處可見。由於 $[0, 1]^3$ 是有界閉集，而最短邊是一個連續函數（continuous function），最大值必定存在，這個事實會在大學第一門分析課程中證明（極值定理（extreme value theorem））。Abbott 的 *Understanding Analysis*（大學分析入門教材）對此有很好的講解，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 難題選講）則有更多同類風格的 STEP 幾何題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。