詳細解答

STEP III 2000，第 9 題

力學 • 彈性斜碰撞

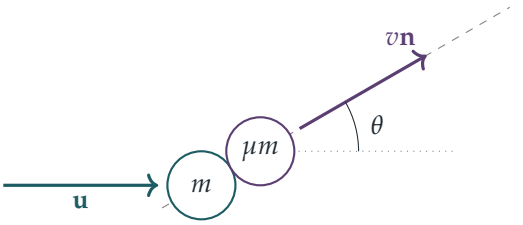
> **STEP III 2000，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q9

關鍵思路

兩個圓盤都是光滑的，所以碰撞期間它們之間唯一的力沿連心線（line of centres）作用。原本靜止的圓盤因此會沿這條線離開，所以 $\mathbf{n}$ 就是連心線的方向。把它的速度寫成 $v\mathbf{n}$，用動量守恆（conservation of momentum，這是一條向量方程）求出另一個圓盤的速度，再讓動能守恆（conservation of kinetic energy）定出 v。第 (ii) 部分只是多用一條能量方程，而不等式則來自餘弦值不能超過 1 這個要求。

解答

我們把兩個圓盤當作光滑水平面上的光滑質點（particle），所以圓盤之間以及圓盤與平面之間都沒有摩擦力。設 θ 為 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{n}$ 之間的夾角，並記 $u = |\mathbf{u}|$，於是 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$。



在碰撞的一刻，連心線（虛線）指向 $\mathbf{n}$ 的方向，與 $\mathbf{u}$ 的方向（點線）成 θ 角。這幅圖只是示意圖，代數運算並不需要用到它。

第 (i) 部分

質量為 μm 的圓盤原本靜止，碰撞期間它所受的唯一水平力，是另一個圓盤施加的接觸力，而這個力沿連心線作用。由於它沿 $\mathbf{n}$ 的方向離開，它碰撞後的速度是 $v\mathbf{n}$，其中 $v > 0$ 是某個速率。

設質量為 m 的圓盤碰撞後的速度為 $\mathbf{w}$。由動量守恆得

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

這次碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的，所以動能守恆：

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

利用 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$，

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

代入並消去 $\frac{1}{2}m$ 和 u^2，

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

現在 $\mu > 0$，而且 $v \neq 0$，因為被撞的圓盤確實動了。所以我們可以除以 μv，得到

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

這就是所求的速率。順帶一提，$v > 0$ 告訴我們 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$，所以 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$。

> **想一想** 為甚麼這裏不需要用牛頓實驗定律（Newton's experimental law）？

其實也可以用：取 $e = 1$，相對速度沿 $\mathbf{n}$ 的分量會反轉，而垂直於 $\mathbf{n}$ 的分量則因為圓盤光滑而保持不變。但「完全彈性」的意思就是動能守恆，而這一條純量方程（scalar equation）連同動量守恆，已經足以確定 v。上面的做法與之完全等價，而且不必分解成分量。

第 (ii) 部分

碰撞後的總動能等於最初的 $\frac{1}{2}mu^2$。如果兩個圓盤平分這些動能，每個就有 $\frac{1}{4}mu^2$，所以對被撞的圓盤而言

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

利用第 (i) 部分的結果和 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$，我們有 $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$，所以

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

由於 $\cos\theta > 0$（見第 (i) 部分末段），我們取正根：

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

要這樣的角存在，我們需要 $\cos\theta \le 1$，即 $\cos^2\theta \le 1$：

$$\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 \iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad \text{（兩邊乘以}8\mu > 0\text{）}$$
$$\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.$$

二次式 $\mu^2 - 6\mu + 1$ 的根是 $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$，而它恰好在兩根之間（包括兩根）為負數或零。因此

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

這正是所要證明的結果。（下界是正數，$3 - \sqrt{8} \approx 0.172$，所以與 $\mu > 0$ 並無矛盾。）反過來說，對這個範圍內的每一個 μ，公式都給出一個在 $(0, 1]$ 內的有效餘弦值，所以平分動能確實可以做到；在範圍的兩端 $\theta = 0$，即正面碰撞（head-on collision）。

驗算

- 正面碰撞的情況：如果 **n** 與 **u** 平行，第 (i) 部分給出 $v = 2u/(1+\mu)$，這是大家熟悉的一維彈性碰撞結果。當 $\mu = 1$ 時就是 $v = u$：運動中的圓盤停下來，把全部運動傳給對方，就像桌球中的情形一樣。
- 質量相等，$\mu = 1$：第 (ii) 部分給出 $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$，所以 $\theta = 45°$。這符合一個經典事實：兩個質量相等的光滑圓盤作彈性碰撞後，會沿互相垂直的方向離開；動能相等又迫使兩者速率相等，所以它們各與 **u** 成 $45°$ 角。
- 數值方面，我們模擬了 10 000 次隨機的光滑彈性碰撞（衝量沿 **n** 方向），確認了動量守恆、能量守恆和第 (i) 部分的速率，並確認了當 μ 介乎 0.172 與 5.83 之間時，在第 (ii) 部分求得的角度下兩者動能相等。舉例來說，$\mu = 0.1$ 給出 $\cos^2\theta = 1.51 > 1$，這是不可能的。

常見錯誤

- 把 **u** 和 **n** 當作平行。這是斜碰（oblique collision）；只有沿連心線的分量 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ 會傳遞過去。
- 除以 v 卻沒有說明它為何不等於零（$v = 0$ 是能量方程中「沒有發生碰撞」的那個解）。
- 忘記排除 $\cos\theta$ 的負平方根。

STEP 之外

把被撞質點的速度寫成沿衝量（impulse）方向，然後運用動量和能量，這個技巧正是物理學中彈性散射（elastic scattering）的核心。在質心參考系（centre-of-mass frame）中，情況最為簡潔：彈性碰撞只是把兩個速度旋轉，而不改變它們的大小；第 (ii) 部分的角度範圍，於是變成一個關於實驗室參考系（lab frame）中哪些角度可以達到的命題。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）把兩個參考系中的碰撞都講解得非常清楚。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。