詳細解答

STEP III 2000，第 8 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP III 2000，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q8

關鍵思路

定義數列的規則是非線性的，而且涉及除法，直接處理並不方便。竅門是把它改寫成乘積的形式：$a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$。這是說，連續三項的某個組合恆等於 1。把同一事實往後推一步再寫一次，然後將兩個式子相減，非線性的規則便化為線性的規則。遞推關係（recurrence）一旦變成線性，求通項公式（closed form）就只需用上二階遞推關係的標準方法：先求輔助二次方程（auxiliary quadratic）的根，再配合兩個初始值。

解答

預備工作：數列有明確定義

每一步都要除以 a_{n-2}，所以我們應先確定沒有任何一項是零。事實上每一項都是正數。我們有 $a_0 = a_1 = 1 > 0$。若 a_{n-1} 和 a_{n-2} 均為正數，則 $1 + a_{n-1}^2 > 0$ 且 $a_{n-2} > 0$，所以 $a_n > 0$。根據歸納法（induction），對所有 n 均有 $a_n > 0$。最初幾項是

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

線性遞推關係

把定義式乘以 a_{n-2}，可得對每個 $n \geq 2$，

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \tag{$*$}$$

設 $P(k)$ 為命題 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$。我們對 k 用歸納法，證明 $P(k)$ 對所有 $k \geq 2$ 成立。

基礎步驟。$a_2 = 2$，而 $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$，所以 $P(2)$ 成立。

歸納步驟。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 2$ 成立，即

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}.$$

我們需要證明 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$。根據定義，$a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$。做法是利用 $n = k$ 時的 $(*)$，把分子中那個礙事的 1 換掉；該式說明 $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$：

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{根據} P(k) \\ &= 3a_k - a_{k-1} && \text{因為} a_{k-1} > 0. \end{aligned}$$

所以 $P(k+1)$ 成立。根據歸納法，對所有 $n \geq 2$ 均有 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$。

> **想一想** 歸納假設（inductive hypothesis）在哪裏用上了？為甚麼可以放心使用 $n = k$ 時的 $(*)$？

歸納假設只用了一次，就是把 $a_k + a_{k-2}$ 換成 $3a_{k-1}$。這個括號之所以出現，全因我們把 1 換成了 $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$。使用 $(*)$ 則完全不需要任何假設：它不過是把 a_k 的定義乘開，對每個 $k \geq 2$ 都成立。換句話說，$a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ 這個量在每一步都相同，正是它把線性關係一步一步傳遞下去。

通項公式

記 $\beta = \alpha^{-1}$。由於 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

因此

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

所以 α^2 和 β^2 就是我們這個遞推關係的輔助方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的兩個根。（具體來說，它們是 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。）

現在對 $n \geq 1$ 定義

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

我們只要驗證 b_n 與 a_n 的首兩項相同，並且滿足同一個遞推關係，便可證明 $b_n = a_n$。

它滿足遞推關係。若 x 是 $x^2 = 3x - 1$ 的根，則乘以 x^{n-2} 可得 $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$。由於 $\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$（這裏用了 $\alpha\beta = 1$），取 $x = \alpha^2$ 並乘以 β，得

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

同樣地，取 $x = \beta^2$ 並乘以 α，可得 $\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$。兩式相加再除以 $\sqrt{5}$：

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

初始值相符。

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

結論。(a_n) 和 (b_n) 都對 $n \geq 3$ 滿足 $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$，而且在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 時相等。這類遞推關係由前兩項決定每一項，所以根據（強）歸納法（strong induction），對每個 $n \geq 1$ 均有 $a_n = b_n$。也就是說，

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

這正是所要證明的。

? **想一想** 為甚麼從 $n = 1$ 而不是 $n = 0$ 開始比較？

a_n 的線性遞推關係在 $n = 3$ 時涉及 a_2 和 a_1，所以要處理 $n \geq 1$ 的情況，只需核對 b_1 和 b_2 便已足夠。其實公式在 $n = 0$ 時同樣成立：$b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$。所以無論從哪裏開始，都沒有損失。

驗算

- 各項為 $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$，即斐波那契數（Fibonacci numbers）$F_1, F_3, F_5, \ldots$（其中 $a_0 = 1 = F_{-1}$）。每一項都等於前一項的三倍減去再前一項：$3 \cdot 13 - 5 = 34$。
- 直接驗證 $(*)$：$34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$。
- 數值上，$a_{10} = 4181$，而 $(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$。$\alpha^{-19}/\sqrt{5}$ 這一項極小，所以 a_n 就是最接近 $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$ 的整數。
- 按原來的規則精確計算數列直至 $n = 39$，所得各項都是整數，每次都滿足線性遞推關係，並與通項公式吻合。

常見錯誤

- 試圖把 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ 代入 $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$ 再展開，以證明 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$。這樣只會弄得一團糟。那個 1 必須用前一步的定義來替換。
- 忘記定義中要除以 a_{n-2}。完整的答案應指出各項均為正數，因此這個除法以及最後約去 a_{k-1} 的一步都是合理的。
- 只驗證 b_n 滿足遞推關係，卻沒有核對兩個初始值。二階遞推關係需要兩個初始值才能確定。

STEP 之外

常數 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ 是斐波那契數的卡西尼恆等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ 的一個例子。這裏只出現奇數下標，所以符號永遠是 $+1$。更一般地，對任何二階線性遞推關係，$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$ 每一步都乘以一個固定的因子（它是一個 2×2 行列式（determinant），而行列式具有可乘性）。像本題這樣的有理遞推關係，竟然出人意料地總是產生整數，這與「Somos 數列」（Somos sequences）和洛朗現象（Laurent phenomenon）的研究有關。至於斐波那契型數列和連分數（continued fractions）的數論（留意 α 就是黃金比（golden ratio)），Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本十分值得細讀的好書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。