詳細解答

STEP III 2000，第 7 題

純數學 • 不等式與極限

> **STEP III 2000，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q7

關鍵思路

兩個不等式都是把一個乘積與我們已經熟悉的東西作比較而得出的。用二項式定理（binomial theorem）展開 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，所得各項與 $\frac{1}{r!}$ 十分相似，只是略小一點。至於乘積 $\mathrm{P}(n)$，算術平均–幾何平均不等式（AM–GM inequality）可以把 n 個因子的乘積化為它們平均值的 n 次方。這些因子是 $1+\frac{1}{2^k}$，它們的平均值剛好略小於 $1+\frac{1}{n}$，於是便直接連回第一部分。

解答

上界 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

由二項式定理，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

第二個分數是 r 個因子的乘積，

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

由於 $0 \le j \le r-1 \le n-1$，每個因子都在 $(0,1]$ 之內。因此這個乘積不超過 1，而展開式中每一項都不超過 $\frac{1}{r!}$。所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

其中最後一個不等式是嚴格的，因為被略去的各項 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \ldots$ 全部為正數。這對每一個正整數 n 都成立。

上界 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

把乘積寫成 $\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$，其中 $a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$，它們全部為正數，所以 AM–GM 不等式適用。算術平均（arithmetic mean）是

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{n},$$

這裏用了等比級數（geometric series）求和 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$。由於 $1 - 2^{-n} < 1$，這個平均值嚴格小於 $1 + \frac{1}{n}$。於是 AM–GM 不等式給出

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \le 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

兩邊都是正數，所以取 n 次方後不等式仍然成立：

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

其中第二個不等式用了第一部分的結果。這對每一個正整數 n 都成立。

> ? **想一想** 嚴格不等式是從哪裏來的？AM–GM 不等式只給出 $\le$。

嚴格性來自 $1 - 2^{-n} < 1$，而不是來自 AM–GM 不等式。事實上，當 $n \ge 2$ 時，各因子 a_k 互不相同，所以 AM–GM 不等式本身也是嚴格的。但當 $n = 1$ 時只有一個因子，AM–GM 不等式成為等式（$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$）。而 $1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ 這一步在任何情況下都是嚴格的，所以這個論證涵蓋所有 n。

極限

每個因子 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$ 都大於 1，所以 $\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$。因此數列 $\mathrm{P}(n)$ 嚴格遞增（strictly increasing），並且有上界（bounded above）e。有上界的遞增數列必定收斂（converge），所以 $\mathrm{P}(n)$ 趨向某個極限（limit）L。

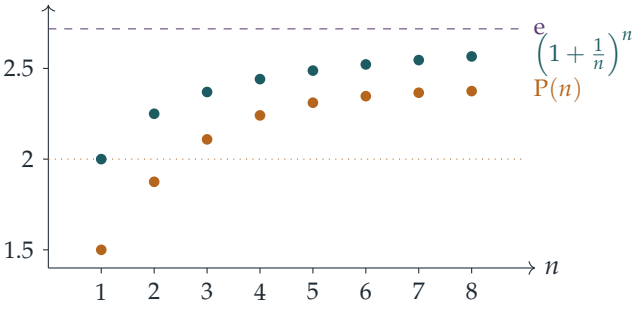
先看上界：每一個 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$，所以極限滿足 $L \le \mathrm{e}$。（取極限只能保留非嚴格不等式，這就是為甚麼我們得到的是 $\le$ 而不是 $<$。）

再看下界，先計算幾項：

$$\mathrm{P}(1) = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{P}(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \mathrm{P}(3) = \frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{135}{64} > \frac{128}{64} = 2.$$

由於數列遞增，$L \ge \mathrm{P}(4) > \mathrm{P}(3) > 2$。綜合起來，

$$2 < L \le \mathrm{e}.$$



驗算

- $n=1$：$(1+1)^1=2<\mathrm{e}$，而 $\mathrm{P}(1)=1.5<2$。當 $n=4$：$\mathrm{P}(4)=\frac{2295}{1024}\approx 2.241<\left(\frac{5}{4}\right)^4\approx 2.441$。
- 以數值方法計算這個乘積，$\mathrm{P}(n)$ 穩定在 $L\approx 2.3842$（到 $n=60$ 時，它在小數點後很多個位都已不再變動），這個數值穩妥地落在 2 與 $\mathrm{e}\approx 2.7183$ 之間。

常見錯誤

- 僅僅因為每個 $\mathrm{P}(n)<\mathrm{e}$ 就聲稱 $L<\mathrm{e}$。嚴格不等式在取極限後可能變成等式；能夠推出的只有 $L\leq \mathrm{e}$。（這裏 $L<\mathrm{e}$ 其實是對的，但需要另作論證。）
- 證明了 $\mathrm{P}(n)>2$ 對某個 n 成立，卻忘記說明數列是遞增的，而正是這一點才把這個界傳給 L。
- 使用 AM–GM 不等式時沒有檢查各 a_k 是否為正數。

STEP 之外

「遞增且有上界，所以收斂」這一步就是單調收斂定理（monotone convergence theorem），它與實數的完備性（completeness）等價。從基本原理出發證明這個定理，是大學分析課程最先做的事情之一。取對數後，$\mathrm{P}(n)$ 變成級數 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$，把它與 $\sum 2^{-k}$ 比較便可知它收斂。這是研究無窮乘積（infinite product）的標準方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）把這兩個想法都講得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。