詳細解答

STEP III 2000，第 6 題

純數學 • 四次多項式的因式分解

STEP III 2000，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s3-q6

關鍵思路

比較係數（comparing coefficients）可把這個因式分解（factorisation）化為三條把 p, q, r 與 a, b, c 聯繫起來的方程。要得到只含 a 的方程，就必須消去 b 和 c，而恆等式（identity）$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$ 正好做到這一點，因為 $b+c$ 和 $b-c$ 正是自然出現的組合。至於最後的四次式（quartic），須先消去 y^3 項，才能用上那條三次方程（cubic），而平移 $y = x + k$ 便可做到。

解答

求 p、q 和 r

展開右邊，得

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + a(b-c)x + bc,$$

其中 x^3 項 $ax^3 - ax^3$ 互相抵消。比較係數，得

$$p = b + c - a^2, \qquad q = a(b-c), \qquad r = bc.$$

a^2 所滿足的三次方程

設 $u = a^2$。由第一條方程，$b + c = p + u$。

若 $a \neq 0$，第二條方程給出 $b - c = q/a$，所以 $(b-c)^2 = q^2/u$。於是

$$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4r = (p+u)^2 - \frac{q^2}{u}.$$

兩邊乘以 $u \neq 0$，

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

所以 $u = a^2$ 是一個根（root）。

若 $a = 0$，則 $q = a(b - c) = 0$，而 $u = a^2 = 0$ 也是一個根，因為這時三次式的每一項在 $u = 0$ 時都等於零。因此在任何情況下 a^2 都是一個根，正如題目所求。

> ? **想一想** 為甚麼不論 p、q 和 r 是甚麼，都必定有一個 $u \geq 0$ 的根？

把這個三次式記為 $f(u)$。在 $u = 0$ 處有 $f(0) = -q^2 \leq 0$，而由於首項是 u^3，當 $u \to +\infty$ 時 $f(u) \to +\infty$。若 $q = 0$，則 $u = 0$ 本身就是一個根。否則 $f(0) < 0$，而對某個足夠大的 U 有 $f(U) > 0$；由於 f 是連續（continuous）的，根據介值定理（intermediate value theorem），在 0 與 U 之間（不含兩端）必有一個根。無論哪種情況，都有一個非負根。

這一點很重要，因為我們需要 $a = \sqrt{u}$ 是實數。非負根必定給出實數 a，所以每個不含 x^3 項的實係數四次式，都可以分解為兩個符合題目形式的實係數二次式（quadratic）。（若 $u > 0$，我們可以由 $b + c = p + u$ 和 $b - c = q/\sqrt{u}$ 求回 b 和 c。）

$p = -1$、$q = -6$、$r = 15$ 的情況

這裏 $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$，所以三次方程是

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

在 $u = 9$ 處：$729 - 162 - 531 - 36 = 0$，所以 $u = 9$ 是一個根。（除去這個因式後得 $(u - 9)(u^2 + 7u + 4)$，其中二次因式有兩個負根，所以 $u = 9$ 是唯一的非負根。）

分解四次式

題目給出的四次式含有 y^3 項，所以我們先作平移把它消去。各根之和為 8，故其平均值為 2，於是設 $y = x + 2$。逐項展開：

$$\begin{aligned}
(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16,\\
-8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64,\\
23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92,\\
-34(x+2) &= -34x - 68,
\end{aligned}$$

把以上各式與 39 相加，得

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

這正是 $p = -1$、$q = -6$、$r = 15$ 的情況，這就是題目先考慮該情況的原因。

取 $u = a^2 = 9$，$a = 3$。則

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

所以 $b = 3$，$c = 5$。驗算一下：$bc = 15 = r$。因此

$$x^4 - x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 5).$$

最後代入 $x = y - 2$：

$$x^2 - 3x + 3 = (y^2 - 4y + 4) - (3y - 6) + 3 = y^2 - 7y + 13,$$
$$x^2 + 3x + 5 = (y^2 - 4y + 4) + (3y - 6) + 5 = y^2 - y + 3.$$

所以

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = (y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3).$$

若改取 $a = -3$，則 b 和 c 互換，得出同樣的兩個因式，只是次序相反。

驗算

- 展開答案：$(y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3) = y^4 - 8y^3 + (3 + 7 + 13)y^2 - (21 + 13)y + 39$，與原式相符。
- 代入 $y = 1$：四次式的值是 $1 - 8 + 23 - 34 + 39 = 21$，而兩個因式給出 $7 \times 3 = 21$。
- 兩個二次因式的判別式（discriminant）都是負數（分別為 -3 和 -11），所以兩者在實數範圍內都不能再分解，而這個四次式沒有實根。這與 $y = 1$ 時取正值相符。

我們也隨機選取了 2000 組有理數 a, b, c 來檢驗 p, q, r 的公式和那條三次方程，並對 2000 組隨機的 (p, q, r) 用二分法（bisection）找到了非負根。

常見錯誤

- 除以 a 得出 $b - c = q/a$，卻沒有處理 $a = 0$ 的情況。
- 以「三次方程必有實根」作為論據：這句話雖然正確，卻沒有證明該根是非負的。關鍵在於 $f(0) = -q^2$ 的正負號。
- 最後忘記由 x 代回 y。

STEP 之外

這基本上就是笛卡兒（Descartes）（以及費拉里（Ferrari））解一般四次方程的方法：先用平移消去三次項，再透過解一條輔助的三次方程，把四次式分解為兩個二次式；這條

輔助方程稱為預解三次方程（resolvent cubic）。配合卡爾達諾（Cardano）的三次方程公式，這個方法說明了每一條四次方程都可以用根式求解（solvable by radicals）。為甚麼這種做法到四次為止，一般的五次方程（quintic）再沒有這樣的公式，正是伽羅瓦理論（Galois theory）所研究的課題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。