詳細解答

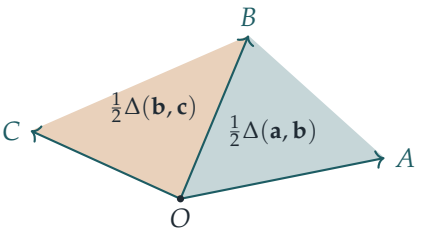
STEP III 2000，第 5 題

純數學 • 線性變換

> **STEP III 2000，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q5

關鍵思路

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 為列的矩陣（matrix）的行列式（determinant），所以它是三角形 OAB 有向面積（signed area）的兩倍，而且恰好在 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行時才不為零。線性映射（linear map）會把所有這類面積乘以同一個因子，即它的行列式。單憑這一點，必要性便立刻得出。至於充分性，(ii) 中的恆等式（identity）只用各個 Δ 就把 $\mathbf{c}$ 以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示出來，所以一旦 $\mathbf{M}$ 由 A 和 B 確定下來，C 被送到哪裏便再無選擇餘地。



解答

以下一律以 $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$ 表示以 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 為列的 2×2 矩陣。於是

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

對於非零的 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$，$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ 恰好在 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行時成立：行列式為零，當且僅當其中一列是另一列的倍數。因此 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$、$\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$、$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 這六個數全部不為零。

還有兩個事實會反覆用到。由於 $\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \ \mathbf{Mv}]$（逐列計算），而且乘積的行列式

等於行列式的乘積，

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{$*$}$$

另外，$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$。

第 (i) 部分

我們需要 $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ 和 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$，兩者合起來就是

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

由於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行，$\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$，所以 $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$ 可逆（invertible），而

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

正符合要求。事實上，這個 $\mathbf{M}$ 是唯一符合要求的矩陣，因為我們可以在右邊乘以逆矩陣。取行列式，得 $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，此數不為零。

第 (ii) 部分：恆等式

取左方的第一個分量：

$$\begin{aligned} &(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 + (c_1 a_2 - c_2 a_1) b_1 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_1 \\ &\quad = a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 = 0, \end{aligned}$$

因為六項兩兩相消。第二個分量的計算完全相同，只是把各個 Δ 以外的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的下標全部由 1 改為 2：

$$\begin{aligned} &(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1) b_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_2 \\ &\quad = a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\, \mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\, \mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\, \mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

這正是所要證明的。這個恆等式對任意三個向量（vector）都成立，所以對 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ 同樣成立：

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, \mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\, \mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\, \mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

> ? **想一想** 這個比例條件寫成等式，確切是在說甚麼？

所有 Δ 都不為零，所以條件 $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 的意思是：存在同一個數 $k \neq 0$，使得

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k\, \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = k\, \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = k\, \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a}). \tag{3}$$

用文字來說：三角形 OPQ、OQR、ORP 的三個有向面積，就是 OAB、OBC、OCA 的面積全部按同一個因子縮放的結果。

第 (ii) 部分：必要性

假設 $\mathbf{Ma}=\mathbf{p}$、$\mathbf{Mb}=\mathbf{q}$ 及 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$。由 $(*)$，

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}),\quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}),\quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

這就是 $k=\det\mathbf{M}$ 時的 (3)，而且因為 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq 0$，所以 $k\neq 0$。因此兩組比相等。

第 (ii) 部分：充分性

現在假設 (3) 對某個 $k\neq 0$ 成立。由第 (i) 部分，存在矩陣 $\mathbf{M}$ 使得 $\mathbf{Ma}=\mathbf{p}$ 及 $\mathbf{Mb}=\mathbf{q}$；我們必須證明這同一個 $\mathbf{M}$ 也把 $\mathbf{c}$ 送到 $\mathbf{r}$。

把 $\mathbf{M}$ 作用於 (1)。矩陣乘法是線性的，而各個 Δ 只是數，所以

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc}=-\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q}-\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

兩邊乘以 k，並對每一項使用 (3)：

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc}=-\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q}-\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

由 (2)，右方等於 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$。所以

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc}=\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

又因為 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq 0$（$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ 不平行），故 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$。因此 P、Q、R 就是 A、B、C 在 $\mathbf{M}$ 之下的像（image）。

必要性與充分性合起來，便證明了這個比例條件是充分必要條件（necessary and sufficient）。

驗算

- 試取 $\mathbf{a}=\binom{1}{0}$、$\mathbf{b}=\binom{0}{1}$、$\mathbf{c}=\binom{1}{1}$。這時 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})=1$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})=-1$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})=-1$，而 (1) 就是 $\binom{1}{1}-\binom{0}{1}-\binom{1}{0}=\mathbf{0}$。取 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$，得 $\mathbf{p}=\binom{2}{0}$、$\mathbf{q}=\binom{1}{3}$、$\mathbf{r}=\binom{3}{3}$，三個 Δ 分別是 6、-6、-6：比例仍然是 $1:-1:-1$，其中 $k=6=\det\mathbf{M}$。
- 在數值方面，我們用精確分數運算，以 20,000 組隨機整數向量三元組檢驗了這個恆等式。在其中約 17,700 組沒有任何兩個向量平行的三元組中，我們按第 (i) 部分構造 $\mathbf{M}$，確認了必要性，並確認 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$ 恰好在 (3) 成立時才成立。

常見錯誤

- 把比例條件寫成一條分數等式，卻沒有說明各個 Δ 不為零。題目假設任何兩個向量都不平行，正是為了保證每一次除法都合法。
- 只證明必要性。真正的內容在於充分性：矩陣由它對兩個線性獨立（independent）向量的作用所確定，所以這個條件必須能迫使第三個像符合要求。
- 因 Δ 內的次序而弄錯正負號：循環次序 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 然後 $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ 是有關係的，因為 $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})$。

STEP 之外

恆等式 (1) 其實是克萊姆法則（Cramer's rule）的另一種面貌：它以行列式之比給出 $\mathbf{c}$ 在基（basis）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 之下的坐標。事實 $(*)$，即線性映射把每個有向面積都按 $\det \mathbf{M}$ 縮放，正是行列式的幾何定義，而二重積分（double integral）換元時出現的雅可比（Jacobian）因子，背後也是這個道理。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對這兩個想法都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。