詳細解答

STEP III 2000，第 4 題

純數學 • 有理函數的描繪

> **STEP III 2000，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q4

關鍵思路

令 $f(x) = x + c$ 並消去分母後，三次項互相抵消，餘下的是一個關於 x 的二次方程（quadratic）。於是直線與曲線是否相交，就取決於一個判別式（discriminant）的正負；而這個判別式本身又是 c 的二次式，所以我們要求「判別式的判別式」。至於描繪圖像，把 f 拆成線性部分加上部分分式（partial fractions），就能得知一切：各條漸近線（asymptote）、曲線位於漸近線的哪一側，以及曲線在何處穿過斜漸近線（oblique asymptote）。

解答

直線與曲線在何處相交

當 $x \neq \pm 1$ 時，方程 $f(x) = x + c$ 等價於

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

展開得 $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$。兩邊的 x^3 項互相抵消，餘下

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

因此，直線與曲線相交，當且僅當 $(*)$ 有一個不等於 $x = \pm 1$ 的實根（real root）。

> ? **想一想** $(*)$ 的根會不會恰好是被排除的值 $x = \pm 1$ 之一？

代入可得 $q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1 - a$ 及 $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$。兩者都與 c 無關，所以只有當 $a = 1$ 時 $x = 1$ 才是根，只有當 $a = -1$ 時 $x = -1$ 才是根。當 $|a| \neq 1$ 時，$(*)$ 的每一個實根都對應一個真正的交點。

$a+2+c=0$ 的情況。這時 $(*)$ 是線性方程：$-(2a+1)x+(a+2)=0$。若 $|a|>1$，則 $2a+1\neq 0$，所以有根 $x=\frac{a+2}{2a+1}$。

$a+2+c\neq 0$ 的情況。這時 $(*)$ 是真正的二次方程，其判別式為

$$D(c)=(2a+1)^2+4c(a+2+c)=4c^2+4(a+2)c+(2a+1)^2.$$

把 D 看成 c 的二次式，其首項係數（leading coefficient）為正。它自身的判別式是

$$\begin{aligned}16(a+2)^2-16(2a+1)^2&=16[(a+2)-(2a+1)][(a+2)+(2a+1)]\\&=16(1-a)\cdot 3(1+a)=48(1-a^2).\end{aligned}$$

若 $|a|>1$，上式為負，所以對任何 c 都有 $D(c)>0$；於是 $(*)$ 有兩個相異實根，而且都不等於 ± 1。連同線性的情況，可知對任何 c，直線 $y=x+c$ 都與曲線相交。

若 $|a|=1$，對任何 c 都有 $D(c)\geq 0$，所以 $(*)$ 仍然總有實根，這就是該命題在代數上的內容。不過這時曲線本身會退化：分子和分母約去一個公因式，曲線變成一條缺了一點的雙曲線（hyperbola）。例如，取 $a=1$ 時，我們得到 $f(x)=x-3+\frac{3}{x+1}$ （$x\neq 1$），而直線 $y=x-3$（即它的漸近線）與它並不相交；在 $(*)$ 中這對應 $c=-3$，此時唯一的根正是被排除的 $x=1$。所以當 $|a|=1$ 時，除了這些例外的 c 值之外，命題都成立；而當 $|a|>1$ 時，命題毫無例外地成立。

若 $|a|<1$，二次式 $D(c)$ 有兩個實根，並且在兩根之間嚴格為負。一個明確的選擇是 $c=-\frac{1}{2}(a+2)$，即兩根的中點：

$$D(-\tfrac{1}{2}(a+2))=(a+2)^2-2(a+2)^2+(2a+1)^2=3(a^2-1)<0.$$

對於這個 c，$a+2+c=\frac{1}{2}(a+2)\neq 0$（因為 $a>-1$），所以 $(*)$ 是一個判別式為負的真正二次方程，沒有實根。因此直線 $y=x-\frac{1}{2}(a+2)$ 與曲線不相交，這正是所要證明的。

斜漸近線

以 x^2-1 除 $x^3-(a+2)x^2+2ax$，得

$$f(x)=x-(a+2)+\frac{(2a+1)x-(a+2)}{x^2-1}.$$

當 $x\to\pm\infty$ 時，該分式趨向 0，所以斜漸近線是

$$y=x-a-2.$$

為了描繪圖像，把該分式拆成部分分式會很有幫助：

$$f(x)=x-(a+2)+\frac{a-1}{2(x-1)}+\frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

由此我們得知一切：

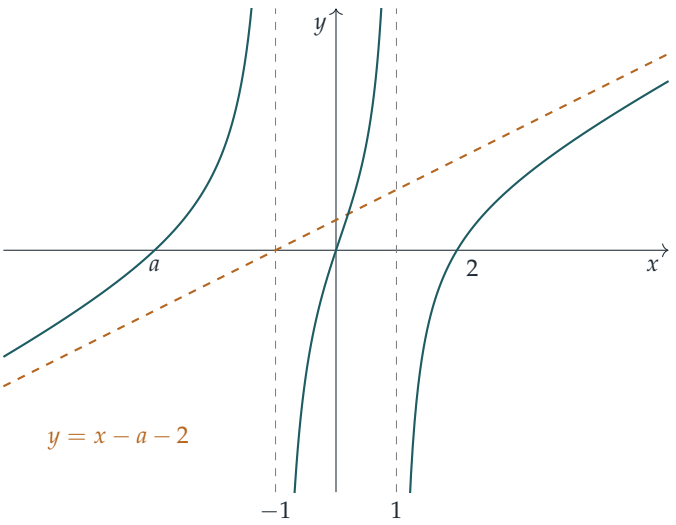
- 零點位於 $x = 0,\ 2,\ a$，鉛垂漸近線（vertical asymptote）位於 $x = \pm 1$；
- 曲線只在 $(2a+1)x = a+2$ 之處與斜漸近線相交，即在 $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$（這又是 $(*)$ 的線性情況）；
- 當 $|x|$ 很大時，差距 $f(x) - (x-a-2)$ 的表現有如 $\frac{2a+1}{x}$。在兩種情況中都有 $2a+1 < 0$，所以當 $x \to +\infty$ 時曲線位於漸近線下方，而當 $x \to -\infty$ 時則位於其上方；
- 係數 $\frac{a-1}{2}$ 和 $\frac{3(a+1)}{2}$ 決定了曲線在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 兩側的表現。

情況 (i)：$a < -1$

兩個係數都是負數：$\frac{a-1}{2} < 0$ 及 $\frac{3(a+1)}{2} < 0$。所以當 $x \to 1^-$ 或 $x \to -1^-$ 時 $f(x) \to +\infty$，而當 $x \to 1^+$ 或 $x \to -1^+$ 時 $f(x) \to -\infty$。此外

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

因為被減去的兩項都是負數，所以 f 在它的三個分支上都是遞增的，完全沒有轉向點（turning point）。交點滿足 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$ 及 $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$，所以 $-1 < x_0 < 1$：曲線在中間的分支上穿過它的漸近線。零點分別位於 $a < -1$（左分支）、0（中間分支）和 2（右分支）。



（圖中取 $a = -3$，這時漸近線是 $y = x + 1$，而 $x_0 = \frac{1}{5}$。）

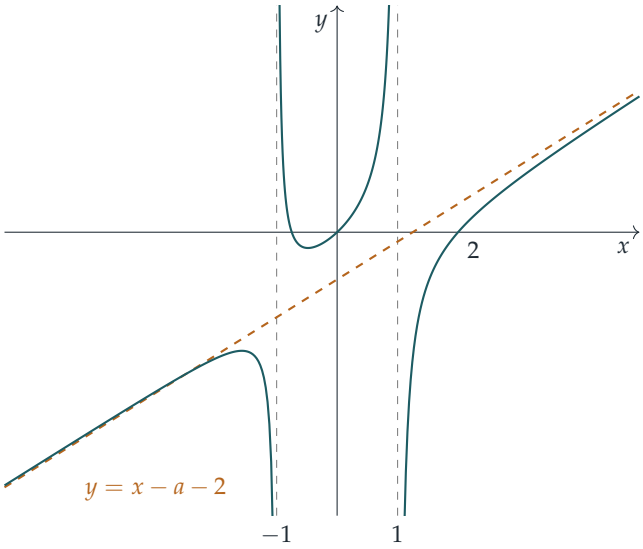
情況 (ii)：$-1 < a < -\frac{1}{2}$

現在 $\frac{a-1}{2} < 0$，但 $\frac{3(a+1)}{2} > 0$。在 $x = 1$ 附近，表現與之前一樣（從左邊趨向 $+\infty$，從右邊趨向 $-\infty$），但在 $x = -1$ 附近則反轉過來：當 $x \to -1^-$ 時 $f(x) \to -\infty$，而當

$x \to -1^+$ 時 $f(x) \to +\infty$。現在 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} < 0$，所以 $x_0 < -1$：交點在左分支上。零點 a 和 0 都位於 $(-1, 0)$ 之內。

> **想一想** 雖然題目沒有要求我們求出轉向點，但它們必定在哪裏？

在左分支上，曲線在漸近線上方從 $-\infty$ 升上來，在 x_0 處穿過漸近線，然後當 $x \to -1^-$ 時跌向 $-\infty$；所以它有一個極大點（maximum）。曲線在這個分支上沒有零點（三個零點全都 > -1），所以整個分支都位於 x 軸下方。在中間分支上，$f \to +\infty$ 於兩端成立，曲線在 a 與 0 之間降到軸的下方，在其他地方則為正，所以在 a 與 0 之間有一個極小點（minimum）。在右分支上，當 $x > 1$ 時 $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} < 1$，所以 $f'(x) > 0$：曲線從 $-\infty$ 上升，經過 $x = 2$，並從下方趨近漸近線。



（圖中取 $a = -\frac{3}{4}$：漸近線為 $y = x - \frac{5}{4}$，交點在 $x_0 = -\frac{5}{2}$，而曲線在 $-\frac{3}{4}$ 與 0 之間略為降到軸的下方。）

驗算

- 取 $a = 0$ 及 $c = -1$（即我們所選的 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$），$(*)$ 變成 $x^2 - x + 1 = 0$，其判別式為 -3：沒有交點，與預期相符。
- 取 $a = -3$：$f(-1.1) \approx 30.9$ 及 $f(-0.9) \approx -28.8$，與情況 (i) 中就 $x \to -1^{\mp}$ 所得的正負號吻合。取 $a = -\frac{3}{4}$，則 $f(-1.1) \approx -5.7$ 及 $f(-0.9) \approx 2.1$，正是情況 (ii) 中反轉了的表現。
- 在每個範圍內取若干個 a 值，以數值方法數算 f' 的變號次數，可以確認情況 (i) 中沒

有轉向點，而情況 (ii) 中左分支和中間分支各恰有一個轉向點。

常見錯誤

- 忘記 $(*)$ 的根 $x = \pm 1$ 並不是交點；當 $|a| = 1$ 時出錯的正是這一點。
- 忽略 $a + 2 + c = 0$ 的情況，這時 $(*)$ 是線性方程，判別式的論證並不適用。
- 在情況 (ii) 中弄錯曲線在鉛垂漸近線 $x = -1$ 兩側的走向：$a + 1$ 的正負號會改變那裏的圖像。

STEP 之外

當 $|a| < 1$ 時，$D(c)$ 的兩個根給出與曲線相切的直線 $y = x + c$，即切線（tangent），而介乎兩者之間的直線則與曲線不相交。當 a 越過 ± 1 時，這些切線會出現或消失，曲線的形狀也隨之改變：一個零點穿過一條鉛垂漸近線，漸近線旁邊的表現隨即反轉。研究一族曲線的定性形狀如何隨參數（parameter）而改變，正是分歧理論（bifurcation theory）的起點，在大學一年級的微分方程（differential equations）課程中就會遇到；可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）。若想多練習這類圖像描繪，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）是極佳的選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。