詳細解答

STEP III 2000，第 3 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP III 2000，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 5.6 節費馬點中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/fermat-point.html

關鍵思路

在阿根圖（Argand plane）上，把一個向量旋轉 $60°$ 只不過是乘以 $\alpha = e^{i\pi/3}$，所以在給定邊上作等邊三角形（equilateral triangle），其第三個頂點一行就可以寫出來。其後的一切都來自恆等式（identity）$1 + \alpha^2 = \alpha$ 及其相關的式子，例如 $\alpha^3 = -1$。它們把各頂點的表達式化成非常簡單的形式，一旦看出這些形式，最後一部分幾乎立即可得。

解答

恆等式

由於 $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$，

$$1 + \alpha^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \alpha.$$

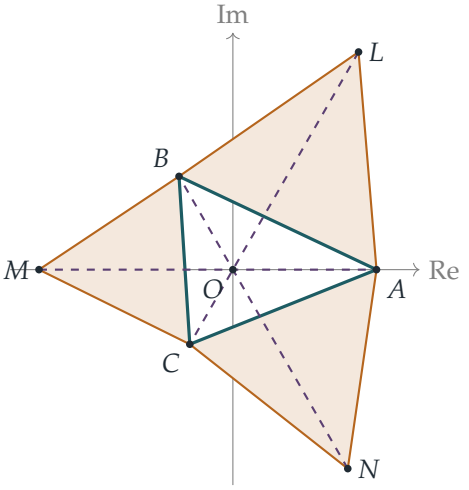
我們還會用到以下幾個推論：

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$；
- $1 - \alpha = -\alpha^2$（這是把恆等式移項所得）；
- $\alpha^2 - \alpha = -1$（同樣是移項所得）；
- $1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$，因為 $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$。

最後一項說明，乘以 $1-\alpha$ 相當於順時針旋轉 $60°$。

三角形 ABC

$A=p$ 位於正實軸上，$B=q\alpha^2=q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ 位於輻角（argument）為 $120°$ 的射線上，而 $C=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ 位於輻角為 $240°$ 的射線上。因此三個頂點分別落在由 O 出發、彼此相隔 $120°$ 的三條射線上，與 O 的距離分別為 p,q,r。原點在三角形之內，而 $A\to B\to C$ 是逆時針方向。下圖取 $p=2$、$q=1.5$、$r=1.2$，並同時畫出在各邊上所作的三角形。



頂點 N、L 和 M

若 XYZ 是一個按順時針方向標記頂點的等邊三角形，那麼從 X 出發來看，邊 XZ 就是邊 XY 繞 X 順時針旋轉 $60°$ 所得。因此

$$Z-X=(Y-X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}=(Y-X)(1-\alpha),\qquad \text{即}\qquad Z=\alpha X+(1-\alpha)Y.$$

? **想一想** 為甚麼「順時針」會令新作的三角形落在 ABC 的外面？

由於 $A\to B\to C$ 是逆時針方向，C 位於有向邊 AB 的左方。把 AB 繞 A 順時針旋轉，它便擺向右方，所以 L 與 C 分別位於 AB 的兩側。其餘兩條邊的情況相同，這與圖中所見吻合。

N（三角形 CAN，故 $X=C$、$Y=A$）：

$$N=\alpha(-r\alpha)+(1-\alpha)p=(1-\alpha)p-\alpha^2 r,$$

正如所求。利用 $1-\alpha=-\alpha^2$，可把它整理成 $N=-\alpha^2(p+r)$。

L（三角形 ABL，故 $X=A$、$Y=B$）：

$$L=\alpha p+(1-\alpha)q\alpha^2=\alpha p+q(\alpha^2-\alpha^3)=\alpha p+q(1+\alpha^2)=(p+q)\alpha,$$

當中先用 $\alpha^3=-1$，再用 $1+\alpha^2=\alpha$。

M（三角形 BCM，故 $X=B$、$Y=C$）：

$$M=\alpha\cdot q\alpha^2+(1-\alpha)(-r\alpha)=q\alpha^3+r(\alpha^2-\alpha)=-q-r=-(q+r),$$

當中用到 $\alpha^3=-1$ 和 $\alpha^2-\alpha=-1$。

因此，仿照題目所給 N 的形式，

$$L=\alpha p+\alpha q,\qquad M=-q-r,\qquad N=(1-\alpha)p-\alpha^2 r.$$

三條直線

現在把每一對點都看成某個單位複數的正數倍：

$$\begin{aligned} L&=(p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C&=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1),\\ M&=(q+r)\cdot(-1), & A&=p\cdot 1,\\ N&=(p+r)\cdot(-\alpha^2), & B&=q\,\alpha^2. \end{aligned}$$

在每一對之中，兩點分別是 u 和 $-u$ 的正實數倍，其中 u 是一個單位複數(分別為 $u=\alpha$、$u=1$ 和 $u=\alpha^2$)。所以這兩點位於同一條通過 O 的直線上，並且分處 O 的兩側。由此可知，直線 LC、MA、NB 各自都通過原點，而且原點其實位於每一條線段上。又因為兩點分處 O 的兩側，每條線段的長度就是兩點與 O 的距離之和：

$$LC=(p+q)+r,\qquad MA=(q+r)+p,\qquad NB=(p+r)+q,$$

全部等於 $p+q+r$，正如所求。

驗算

取 $p=1$、$q=2$、$r=3$，由公式得 $L=3\alpha\approx 1.5+2.598\mathrm{i}$、$M=-5$ 和 $N=-4\alpha^2\approx 2-3.464\mathrm{i}$。計算得 $|L-A|=|L-B|=|A-B|=\sqrt{7}$，確認 ABL 是等邊三角形。我們又用電腦直接由 $\pm 60^\circ$ 的兩個旋轉作出每個三角形，保留順時針的那一個，並就 10 000 組隨機選取的 p,q,r 確認了三條公式、三線共點（concurrence）於 O，以及共同長度 $p+q+r$。一個漂亮的特殊情況：當 $p=q=r$ 時，三角形 ABC 是以 O 為中心的等邊三角形，而整個圖形具有預期中的三重旋轉對稱。

常見錯誤

- 旋轉方向弄錯，乘了 α 而不是 $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$。這樣 L、M、N 會落在三角形之內，題目所給 N 的形式也推不出來。
- 只證明了 O 在每條直線上，卻忘記要得出長度，還需要 O 位於兩個端點之間。各實數倍的正負號正好解決這一點。

STEP 之外

這是拿破崙構形（Napoleon's configuration）的一個特殊情況：對任意三角形，在各邊向外作等邊三角形，直線 AM、BN、CL 都交於同一點（費馬點，Fermat point），而且三條線段長度相等。費馬點使它到三個頂點的距離總和達到最小；在本題中它就是 O，從這一點看每條邊所張的角都是 120°。複數把旋轉變成乘法，這正是此類證明可以化為簡短代數運算的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點發揮得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。