詳細解答

STEP III 2000，第 2 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2000，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s3-q2

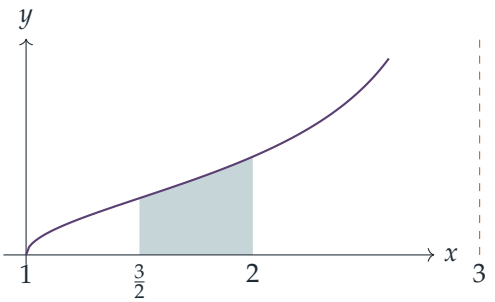
關鍵思路

像 $(x-1)/(3-x)$ 這類商的平方根，最適合用半角公式（half-angle formulae）處理：設 $x = 2 - \cos\theta$，分子變成 $1 - \cos\theta$，分母變成 $1 + \cos\theta$，而兩者之比是一個完全平方，即 $\tan^2\frac{\theta}{2}$。至於一般情況的結果，我們不必把運算重做一遍。只要作一個線性變數代換（linear change of variable），把由 a 到 b 的區間映到由 1 到 3 的區間，一般的積分就會變成第一個積分的倍數。

解答

第一個積分

被積函數（integrand）在 $1 \le x < 3$ 上有定義，而我們的積分範圍 $\frac{3}{2} \le x \le 2$ 正好在其中。下圖的陰影面積就是所求的積分。



設 $x = 2 - \cos\theta$，則 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。當 $x = \frac{3}{2}$ 時，$\cos\theta = \frac{1}{2}$；當 $x = 2$ 時，$\cos\theta = 0$，

所以我們取 θ 由 $\frac{\pi}{3}$ 到 $\frac{\pi}{2}$。於是

$$x-1=1-\cos\theta=2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\qquad 3-x=1+\cos\theta=2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

所以

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac12}=\left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right|=\tan\tfrac{\theta}{2},$$

這是因為在我們的範圍內 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以正切值為正。

想一想 當被積函數變成 $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$ 之後，怎樣才可以避免對正切函數求積分？

寫出 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。餘弦項會互相抵消：

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}=2\sin^2\tfrac{\theta}{2}=1-\cos\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x&=\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\Big[\theta-\sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2}\\&=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-1+\frac{\sqrt3}{2}\\&=\frac{\pi+3\sqrt3-6}{6}.\end{aligned}$$

一般的積分

第一個積分就是 $a=1$、$b=3$ 的情況，此時 $p=\frac{3+3}{4}=\frac32$，$q=\frac{1+3}{2}=2$。所以我們要找一個線性代換，把 $u=1$ 送到 $x=a$，把 $u=3$ 送到 $x=b$：

$$x=a+\tfrac12(b-a)(u-1),\qquad \mathrm{d}x=\tfrac12(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

於是

$$x-a=\tfrac12(b-a)(u-1),\qquad b-x=(b-a)-\tfrac12(b-a)(u-1)=\tfrac12(b-a)(3-u),$$

又因為 $b-a\neq0$，公因子可以約去：

$$\frac{x-a}{b-x}=\frac{u-1}{3-u}.$$

至於積分上下限：$u=\frac32$ 給出 $x=a+\frac14(b-a)=\frac{3a+b}{4}=p$，而 $u=2$ 給出 $x=a+\frac12(b-a)=\frac{a+b}{2}=q$。由於 $b-a>0$，這個代換是遞增的，所以上下限的次序保持不變。因此

$$\begin{aligned}\int_p^q\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x&=\frac{b-a}{2}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac12}\mathrm{d}u\\&=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt3-6}{6}=\frac{(b-a)(\pi+3\sqrt3-6)}{12},\end{aligned}$$

其中用到了第一個結果。這正是我們要證明的。

(另一個等價的做法，是直接代入 $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$。上下限同樣是 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$，運算過程也一樣，只是多了一個因子 $\frac{b-a}{2}$。)

驗算

- 數值上，$\frac{1}{6}(\pi + 3\sqrt{3} - 6) \approx 0.38962$。把辛普森法則（Simpson's rule）用於原來的被積函數，在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上計算，所得的值準確至小數點後十位都相同。
- 合理性：被積函數在長度為 $\frac{1}{2}$ 的區間上由 $\sqrt{1/3} \approx 0.577$ 上升至 1，所以面積必定介乎約 0.29 與 0.5 之間。結果確實如此。
- 隨機選取 20 組 $a < b$（包括 a 為負數的情況），一般公式都與辛普森法則的結果吻合。
- 縮放：把區間 $[a, b]$ 按因子 k 拉伸，被積函數的取值不變，但 $[p, q]$ 會拉伸 k 倍。所以答案必定與 $b - a$ 成正比，而事實正是這樣。

常見錯誤

- 忘記了 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，試圖只對 $\tan\frac{\theta}{2}$ 關於 θ 求積分。
- 把上下限取為 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$。無論怎樣選取，都必須使 θ 由 $\frac{\pi}{3}$ 遞增至 $\frac{\pi}{2}$，並且途經的範圍內 $\sin\theta > 0$ 和 $\tan\frac{\theta}{2} > 0$ 都成立。
- 在一般情況中漏掉 $\mathrm{d}x$ 帶來的因子 $\frac{1}{2}(b-a)$，結果分母變成 6 而不是 12。

STEP 之外

第二部分說明，定積分（definite integral）在仿射變數代換（affine change of variable）之下的變化是有規律可循的。這就是為甚麼像這樣的量只透過長度 $b - a$ 依賴於 a 和 b。被積函數本身屬於貝塔函數（beta function）類型：在整個區間上，$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$，而函數 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ 在概率和分析中反覆出現。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率導論）把它們作為貝塔分佈（Beta distribution）的歸一化常數（normalising constants）來介紹。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析導論）則嚴謹地證明了代換法則（substitution rule）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。