詳細解答

STEP III 2000，第 14 題

概率與統計 • 協方差與獨立性

> **STEP III 2000，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q14

關鍵思路

先補上欠缺的第四個概率（probability），然後把 $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ 逐項寫出。所有項會合併成單一因子 $a - pq$ 乘以一個不可能為零的量，而 $a = pq$ 正好就是說左上角那一格可以分解成邊際概率之積。在 2×2 的表中，只要有一格可以這樣分解，邊際概率就會迫使其餘三格也一樣。若變量可取三個值，迴旋的空間就多了，一個對稱的表便足以打破這種聯繫。

解答

恆等式

四個概率之和為 1，所以

$$\mathrm{P}(X = x_2,\, Y = y_2) = 1 - a - (q - a) - (p - a) = 1 - p - q + a.$$

沿各行各列相加，便得到邊際分佈（marginal distribution）：

$$\mathrm{P}(X = x_1) = a + (q - a) = q, \qquad \mathrm{P}(Y = y_1) = a + (p - a) = p,$$

所以 $\mathrm{P}(X = x_2) = 1 - q$ 及 $\mathrm{P}(Y = y_2) = 1 - p$。這就是 p 和 q 的真正意義。

	y_1	y_2	
x_1	a	$q - a$	q
x_2	$p - a$	$1 - p - q + a$	$1 - q$
	p	$1 - p$	

現在

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= a\,x_1y_1 + (q-a)\,x_1y_2 + (p-a)\,x_2y_1 + (1-p-q+a)\,x_2y_2,\\ \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) &= \big(qx_1 + (1-q)x_2\big)\big(py_1 + (1-p)y_2\big)\\ &= pq\,x_1y_1 + q(1-p)\,x_1y_2 + p(1-q)\,x_2y_1 + (1-p)(1-q)\,x_2y_2.\end{aligned}$$

逐個係數相減：

$$\begin{aligned}x_1y_1:&\quad a - pq,\\ x_1y_2:&\quad (q-a) - (q-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_1:&\quad (p-a) - (p-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_2:&\quad (1-p-q+a) - (1-p-q+pq) = a-pq.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a-pq)(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2) = (a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

所以若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$，則左方為零，即 $(a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2) = 0$，這正是所求。

獨立性

任何一對各取兩個相異值的隨機變量（random variable），其聯合概率表都具有上述形式，只要選取適當的 a、p、q 便可（替各格命名即可）。若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$，則上面的乘積為零。由於 $x_1 \neq x_2$ 及 $y_1 \neq y_2$，最後兩個因子均不為零，所以 $a = pq$。

想一想 我們現在知道有一格可以分解。為甚麼這樣就能確定其餘三格？

因為其餘每一格都等於一個邊際概率減去一個已知的格：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x_1, Y=y_2) &= q - pq = q(1-p) = \mathrm{P}(X=x_1)\,\mathrm{P}(Y=y_2),\\ \mathrm{P}(X=x_2, Y=y_1) &= p - pq = p(1-q) = \mathrm{P}(X=x_2)\,\mathrm{P}(Y=y_1),\\ \mathrm{P}(X=x_2, Y=y_2) &= 1 - p - q + pq = (1-p)(1-q) = \mathrm{P}(X=x_2)\,\mathrm{P}(Y=y_2).\end{aligned}$$

每一格都是其邊際概率之積，所以 X 與 Y 獨立（independent）。（反過來，獨立性可推出 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$，這是標準結果，所以對於只取兩個值的變量，這兩個條件是等價的。）

取三個值的例子

由於 A 和 B 各自在 $\{-1, 0, 1\}$ 上均勻分佈，我們有 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$，所以我們需要一個表，其每行每列之和均為 $\frac{1}{3}$，且 $\mathrm{E}(AB) = 0$，但並非每一格都等於 $\frac{1}{9}$。一個對稱的選

擇便可做到：

	$B=-1$	$B=0$	$B=1$
$A=-1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$A=0$	0	$\frac{1}{3}$	0
$A=1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

每行及每列之和均為 $\frac{1}{3}$，所以 A 和 B 各自取 -1、0、1 的概率均為 $\frac{1}{3}$。只有四個角落的格才給出非零的乘積 ab：

$$\mathrm{E}(AB)=\tfrac{1}{6}(1)+\tfrac{1}{6}(-1)+\tfrac{1}{6}(-1)+\tfrac{1}{6}(1)=0=\mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B).$$

但 $\mathrm{P}(A=0,B=0)=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{9}=\mathrm{P}(A=0)\,\mathrm{P}(B=0)$，所以 A 與 B 並不獨立。用文字來說：$B=0$ 當且僅當 $A=0$，否則無論 A 是甚麼，B 取 ±1 的機會均等。

驗算

- 試取 $X=Y$，其中 $x_1=y_1=1$，$x_2=y_2=0$：此時 $a=p=q$，而恆等式給出 $\mathrm{Var}(X)=p-p^2$，這對伯努利變量（Bernoulli variable）而言是正確的。
- 這個恆等式是一個多項式恆等式：我們隨機選取了 2000 組 x_i、y_i、a、p、q，以有理數運算精確地驗證了它。同一次驗算亦檢查了取三個值的表：邊際概率全為 $\frac{1}{3}$，$\mathrm{E}(AB)=0$，以及 $\mathrm{P}(A=0,B=0)=\frac{1}{3}$。

常見錯誤

- 證出 $a=pq$ 便停筆。獨立性要求每一格都可以分解，所以其餘三格也需要檢查（很快便可完成）。
- 忘記說明為何可以約去 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$：因為所取的值相異，所以它不為零。
- 在最後一部分提出 $B=A^2$ 或 $B=|A|$。這些例子確實是不獨立而協方差為零，但 B 永不等於 -1，所以它們沒有題目要求的邊際分佈。

STEP 之外

$\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ 這個量就是協方差(covariance)，而本題說明「不相關」(uncorrelated)比「獨立」為弱，只有取兩個值的（類似指示變量的）變量例外：對這類變量，恆等式把一切歸結為兩個指示變量（indicator）的協方差。你日後會遇到一個相關的事實：對於聯合正態（jointly normal）的隨機變量，協方差為零確實可推出獨立。想進一步了解，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門），或 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論導論）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。