詳細解答

STEP III 2000，第 13 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2000，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q13

關鍵思路

處理這兩個隨機變量（random variable），最方便的做法是考慮「尾部」或「累積」事件。第一個六點在第 r 次擲骰之後才出現，當且僅當每一顆骰子在首 r 次擲骰中全部落空；最後一個六點在第 r 次擲骰或之前已經出現，當且僅當每一顆骰子都已經擲出過六點。這兩個事件各自都是若干獨立事件（independent events）的交集，所以其概率是一個乘積，而把相鄰兩個值相減便得出分佈。一旦認出「第一個六點」這個變量服從幾何分佈（geometric distribution），與它有關的一切都可以很快求得。

解答

以下一律假設各顆骰子之間互相獨立，而每次擲骰之間亦互相獨立。對單獨一顆骰子，設 X_i 為第 i 顆骰子首次擲出六點時的擲骰次數，則

$$\mathrm{P}(X_i > r) = q^r \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

因為 $X_i > r$ 表示連續 r 次都擲不出六點。於是 $R = \min_i X_i$，$S = \max_i X_i$。

第一個六點

事件 $R > r$ 表示 n 顆骰子在首 r 次擲骰中都沒有擲出六點，即全部 nr 次個別投擲的結果都不是六點。由獨立性，

$$\mathrm{P}(R > r) = q^{nr}.$$

因此，對 $r \geq 1$，

$$\mathrm{P}(R = r) = \mathrm{P}(R > r - 1) - \mathrm{P}(R > r) = q^{n(r-1)} - q^{nr} = q^{nr}(q^{-n} - 1),$$

這正是所求的結果。

記 $Q = q^n$，上式即 $\mathrm{P}(R = r) = Q^{r-1}(1-Q)$：$R$ 服從幾何分佈，每次把整組骰子擲一次，「成功」（至少出現一個六點）的概率為 $1 - Q$。所以它的概率生成函數（probability generating function，簡稱 PGF）是一個等比級數（geometric series）：

$$\begin{aligned} G_R(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r Q^{r-1}(1-Q) &= (1-Q)\, t \sum_{r=1}^{\infty} (Qt)^{r-1} \\ &= \frac{(1-q^n)\, t}{1 - q^n t}, \end{aligned}$$

對 $|t| < q^{-n}$ 成立（特別是在 $t = 1$ 附近）。

要求平均值，用商法則（quotient rule）求導：

$$G_R'(t) = (1-q^n)\,\frac{(1-q^n t) + q^n t}{(1-q^n t)^2} = \frac{1-q^n}{(1-q^n t)^2},$$

所以

$$\mathrm{E}(R) = G_R'(1) = \frac{1}{1-q^n}.$$

當 $n = 2$ 且 $p = \frac{1}{6}$ 時，$q^2 = \frac{25}{36}$，故 $\mathrm{E}(R) = 1 \big/ \frac{11}{36} = \frac{36}{11}$，正如所求。

最後一個六點

事件 $S \le r$ 表示每一顆骰子都在首 r 次擲骰中的某一次擲出過六點。對一顆骰子而言，這個概率是 $1 - q^r$，而各顆骰子互相獨立，所以

$$\mathrm{P}(S \le r) = (1-q^r)^n.$$

把相鄰兩個值相減，對 $r \ge 1$，

$$\mathrm{P}(S = r) = \mathrm{P}(S \le r) - \mathrm{P}(S \le r-1) = (1-q^r)^n - (1-q^{r-1})^n,$$

正如所求。（當 $r = 1$ 時，第二項是 $0^n = 0$，結果正確。）

> **想一想** 要對 $t^r[(1-q^r)^2 - (1-q^{r-1})^2]$ 求和，看來相當繁複。怎樣才可以把它化成等比級數？

當 $n = 2$ 時，把平方展開：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S = r) &= (1 - 2q^r + q^{2r}) - (1 - 2q^{r-1} + q^{2r-2}) \\ &= 2q^{r-1}(1-q) - q^{2(r-1)}(1-q^2) \\ &= 2p\, q^{r-1} - (1-q^2)\,(q^2)^{r-1}. \end{aligned}$$

每一項都是一個幾何分佈（的倍數），所以

$$G_S(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r \,\mathrm{P}(S = r) = \frac{2pt}{1-qt} - \frac{(1-q^2)\,t}{1-q^2t}.$$

這個結果合乎情理：由於 $S = X_1 + X_2 - R$，它的分佈就是「參數為 p 的幾何分佈的兩倍，減去 R 的分佈」。要化簡，可把各項通分，以 $(1-qt)(1-q^2t)$ 為公分母，並利用 $1-q^2 = p(1+q)$：

$$\begin{aligned} 2p(1-q^2t) - p(1+q)(1-qt) &= p[\,2 - 2q^2t - 1 - q + qt + q^2t\,] \\ &= p[(1-q) + qt(1-q)] = p^2(1+qt). \end{aligned}$$

因此

$$G_S(t) = \frac{p^2\,t\,(1+qt)}{(1-qt)(1-q^2t)}.$$

作為簡單的核對，$G_S(1) = \dfrac{p^2(1+q)}{p\cdot p(1+q)} = 1$。

要求平均值，以拆開的形式求導最為容易，因為每一部分都是一個幾何分佈的 PGF，它在 1 處的導數就是其平均值乘以相應的係數。對 $\dfrac{(1-a)t}{1-at}$ 而言，在 $t = 1$ 處的導數是 $\dfrac{1}{1-a}$（與上面 G_R 的情況完全一樣），所以

$$\mathrm{E}(S) = G_S'(1) = 2\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)-1}{p(1+q)} = \frac{1+2q}{p(1+q)}.$$

當 $p = \frac{1}{6}$，$q = \frac{5}{6}$ 時：

$$\mathrm{E}(S) = 12 - \frac{36}{11} = \frac{96}{11} \approx 8.73.$$

驗算

- $\mathrm{E}(R) + \mathrm{E}(S) = \frac{36}{11} + \frac{96}{11} = 12 = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2)$，這是必然的，因為 $\min + \max = X_1 + X_2$。
- 當 $n = 1$ 時，第一個六點與最後一個六點重合，而 G_R 化為單顆骰子的幾何分佈 PGF $pt/(1-qt)$。
- 以蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）擲 2×10^5 對骰子，所得樣本平均值為 3.274 和 8.709，而理論值為 $\frac{36}{11}\approx 3.273$ 和 $\frac{96}{11}\approx 8.727$；另外，以數值方法對 G_S 的級數求和，在 t 的若干個取值上都與閉合形式相符。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{P}(S = r)$ 寫成「某一顆骰子在第 r 次擲骰時首次擲出六點，而其餘骰子在此之前已擲出」，卻忘記了兩顆骰子在同一次擲骰中首次擲出六點的情況。改用 $\mathrm{P}(S \leq r)$ 來處理，便可完全避免這個問題。
- 對化簡後的 G_S 求導，而不是對拆開的形式求導：做法正確，但代數運算多得多，出錯的機會也多。

STEP 之外

R 和 S 分別是若干獨立隨機變量的最小值和最大值，是順序統計量（order statistics）最簡單的例子；利用 $\mathrm{P}(\min > r)$ 和 $\mathrm{P}(\max \leq r)$ 這個技巧，對任何分佈都適用。具有無記憶性（memoryless）的幾何分佈，是指數分佈（exponential distribution）在離散情況下的近親；在連續極限之下，n 個指數分佈變量的最大值的期望值變成調和和（harmonic sum）$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$（再乘以平均值），這是優惠券收集問題（coupon collector's problem）中的關鍵一步。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對生成函數及上述各種想法有深入的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。