詳細解答

STEP III 2000，第 11 題

力學 • 繞粗糙支點的轉動

STEP III 2000，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s3-q11

關鍵思路

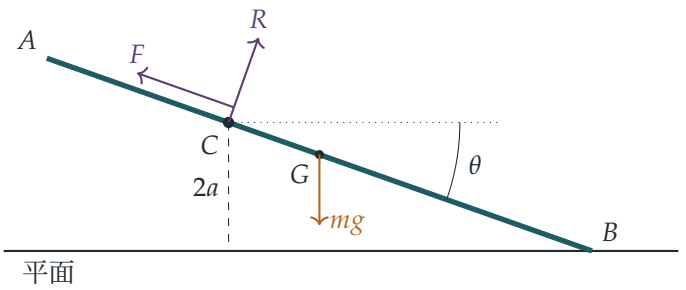
只要沒有滑動，棒就只是繞着橫樑上的點 C 轉動，因此它是一個繞固定軸轉動的剛體（rigid body）。由能量可求得角速率（angular speed），由力矩方程可求得角加速度（angular acceleration）。然後對質心（centre of mass）應用牛頓第二定律（Newton's second law），分別沿棒的方向和垂直於棒的方向分解，便可知道橫樑必須提供的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）。只要摩擦力不超過法向反作用力的 μ 倍，棒就不會滑動，而我們需要這個條件一直成立，直至 B 到達平面為止。

解答

模型與幾何

我們把棒視為均勻剛棒，把橫樑視為一條固定而粗糙的細線，因此橫樑只在 C 處施加單一個接觸力：垂直於棒的法向反作用力 R 和沿棒方向的摩擦力 F。

質心 G 是棒的中點，與 A 相距 $4.5a$。由於 $AC = 3a$，G 位於 C 靠 B 的一側，且 $CG = \frac{3}{2}a$，$CB = 6a$。所以重力對 C 有力矩（moment），棒會傾側，B 端向下。設 θ 為棒轉過的角，即棒與水平線所成的角為 θ。



當 B 下降了 $2a$ 時便到達平面，即當 $6a\sin\theta = 2a$ 時，亦即

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

繞 C 的轉動

根據平行軸定理（parallel axes theorem），對 C 的轉動慣量（moment of inertia）為

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

在沒有滑動的期間，C 固定不動，接觸力不作功。G 下降了 $\frac{3}{2}a\sin\theta$，所以由能量守恆（conservation of energy）（從靜止開始）得

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot\theta^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

對 C 取力矩（只有重力有力矩）：

$$9ma^2\,\ddot\theta = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

（把能量方程對 t 求導，會得到相同的結果，這是一個有用的驗算。）

接觸力

G 在以 C 為圓心、半徑為 $\frac{3}{2}a$ 的圓上運動，所以它的加速度有一個沿棒指向 C 的分量 $\frac{3}{2}a\dot\theta^2$，以及一個垂直於棒的分量 $\frac{3}{2}a\ddot\theta$，方向為 θ 增加的方向（即垂直於棒向下）。

想一想 摩擦力的方向是哪一邊？為甚麼它不單單是 $mg\sin\theta$？

重力沿棒向下的分量 $mg\sin\theta$ 會把棒朝 B 的方向拉離橫樑；此外，G 還需要一個指向 C 的向心力（centripetal force）。兩者都必須由摩擦力提供，因此摩擦力沿棒向上，指向 A。沿棒的方向分解，並以指向 C 的方向作為 G 的加速度的正方向：

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot\theta^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

所以

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

垂直於棒的方向分解，取 G 加速的方向：

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

所以

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

這在整個過程中都是正數，所以棒一直與橫樑保持接觸。

不滑動的條件

只要 $F \le \mu R$，棒就不會在 C 處滑動，即

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

比值 $2\tan\theta$ 隨 θ 遞增，在釋放時由 0 開始，所以這個條件在最後一刻最難滿足，亦即 B 剛到達平面之時。該處 $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$，所以我們需要

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此 μ 的最小值為

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

若恰好取這個值，摩擦力只在 B 撞到平面的一瞬間才達到極限；若 μ 再小一點，棒便會在此之前開始滑動。

驗算

- 釋放時 $\dot{\theta} = 0$，所以 $F = 0$ 而 $R = \frac{3}{4}mg$：橫樑所承受的力小於整個重量，因為 G 開始以 $\frac{3}{2}a\ddot{\theta} = \frac{1}{4}g$ 向下加速。這就是常見的「放手後的木板感覺變輕」效應。
- 單位：F 和 R 都是 mg 的倍數，而 μ 是無量綱（dimensionless）的，理應如此。
- 我們由靜止開始，用數值方法逐步求解方程 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$，以有限差分（finite differences）計算 G 的加速度，再由牛頓第二定律還原出 F 和 R。結果與 $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ 和 $\frac{3}{4}mg\cos\theta$ 吻合，而 F/R 穩步上升，在 $\sin\theta = \frac{1}{3}$ 時達到 $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$。

常見錯誤

- 對棒的中心取力矩，或忘記平行軸定理中的附加項：$I_C = 9ma^2$，而不是 $\frac{27}{4}ma^2$。
- 把問題當作靜力學（statics）來處理，取 $F = mg\sin\theta$、$R = mg\cos\theta$，從而得出 $\mu \geq \tan\theta$。其實 G 的向心加速度和切向加速度都會改變這些力。
- 只在釋放的一刻檢查摩擦條件（那時 $F = 0$），而沒有在條件最嚴苛的位置檢查。

STEP 之外

這道題讓我們初嘗帶有約束力（constraint forces）的剛體動力學：我們先由能量和力矩求出運動，然後才對質心應用牛頓定律，倒推出約束必須提供的力。同樣的模式（先解出運動，再檢查約束是否真的能提供所需的力）可以用來判斷梯子何時開始滑動、傾倒的鉛筆何時離開桌面，或者珠子何時離開鐵線。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）仔細講解了定軸轉動，以及力矩與質心運動之間的關係。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。