詳細解答

STEP III 2000，第 10 題

力學 • 極限摩擦力平衡

> **STEP III 2000，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q10

關鍵思路

先從幾何入手：題目選用 $\sqrt{3}\,a$ 和 a 這兩個距離，是為了令樑與地面成一個特殊角，而這個角決定了題中所有方向。然後對兩個能令未知力消失的點取力矩（moment）。對鉸鏈（hinge）X 取力矩時，樑的方程只含球體給予的法向反作用力（normal reaction），因為球體給予的摩擦力（friction）正好沿著樑本身的方向。對球心取力矩時，除了兩個摩擦力之外，其餘各力都通過球心，所以兩個摩擦力必定相等。

解答

模型與幾何

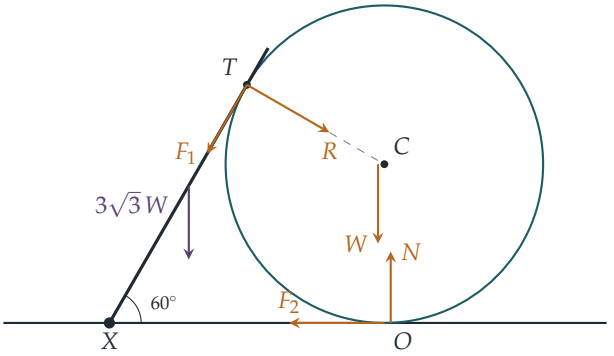
我們把樑視為均勻（uniform）桿，把球體視為均勻剛體（rigid body），其重量作用於球心 C。兩個接觸點都是粗糙的。設 O 為球體與地面的接觸點，則 $OX = \sqrt{3}\,a$，$OC = a$，而 OC 是鉛垂的。

樑與球體在點 T 接觸，並在該處與球體相切。地面則是由 X 所作的另一條切線（tangent）。在直角三角形 XOC 中，

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{所以} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

由 X 所作的兩條切線關於直線 XC 對稱，所以樑與地面的夾角是 $2 \times 30^\circ = 60^\circ$。由同一點所作的切線長度相等，所以 $XT = XO = \sqrt{3}\,a$。由於 $\sqrt{3}\,a < 2a$，接觸點確實在樑上，位置稍稍超過樑的中點。

半徑 CT 垂直於樑。因此，在 T 的法向反作用力與水平方向成 30°，而在 T 的摩擦力沿著樑的方向，與水平方向成 60°。



琥珀色的箭頭表示作用於球體的力。樑所受的 R 和 F_1 方向與此相反，此外還有作用於樑中點的重量 $3\sqrt{3}\,W$（與 X 相距 a），以及鉸鏈處一個未知的反作用力。

摩擦力的方向是我們猜測的：對球體而言，F_1 沿著樑向下指向 X，而 F_2 沿著地面指向 X。假如猜錯了，該力算出來便會是負數。

樑：對 X 取力矩

鉸鏈的反作用力作用於 X，所以它對 X 沒有力矩。球體給予的摩擦力沿著樑的方向，而樑所在的直線通過 X，所以它也沒有力矩。法向反作用力 R 垂直於樑，作用點的距離為 $XT = \sqrt{3}\,a$。重量的作用線與 X 的水平距離為 $a\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$。因此

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{所以} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

球體：對 C 取力矩

R、W 和 N 這三個力都通過 C。（法向反作用力沿半徑方向作用。）兩個摩擦力都沿切線方向，各與 C 相距 a。在 T 的 F_1 使球體繞 C 向一個方向轉動，而在 O 的 F_2 則使它向相反方向轉動，所以

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = F_2.$$

把這個共同的值記為 F。

> **想一想** 在對兩個摩擦力還一無所知的時候，為甚麼我們已經可以肯定它們相等？

球體處於平衡（equilibrium）狀態，所以對任何一點的總力矩都是零。選球心最為巧妙：重量和兩個法向反作用力都通過球心，於是只剩下兩個摩擦力，而它們的力臂（lever arm）同樣是 a。

球體：分解力

水平方向（resolving，即把力分解），取遠離 X 的方向為正：R 的分量是 $R\cos 30°$，F_1 的分量是 $-F\cos 60°$，而 F_2 的貢獻是 $-F$。所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{所以} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

這個值是正數，可見先前猜測的摩擦力方向是對的。鉛垂方向，R 向下推，分量為 $R\sin 30°$；F_1 向下拉，分量為 $F\sin 60°$。所以

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

摩擦係數

球體在兩個接觸點都即將滑動，所以兩處的摩擦都達到極限（limiting friction）：$F_1 = \mu_1 R$ 及 $F_2 = \mu_2 N$。因此，兩個摩擦係數（coefficient of friction）為

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

驗算

- 用坐標作數值驗算（$a = 1.3$，$W = 2$），確認了 T 在球面上，而且 CT 垂直於樑。直接解球體的三條平衡方程，得出 $R = 1.5W$、$F_1 = F_2 \approx 0.8660W$ 和 $N = 2.5W$，所以 $\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$，$\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$。
- 一條獨立的方程：對球體以 O 為支點取力矩。這時 N、F_2 和 W 都沒有力矩。R 的作用線通過 C，所以它的力矩等於其水平分量在高度 a 處的力矩，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$。F_1 對 O 的力矩算出來是 $\frac{3}{2}aF$。令兩者相等，便再次得到 $F = R/\sqrt{3}$，而無須用到對 C 的力矩方程。
- 兩個係數都小於 1，對一般的粗糙接觸面來說，這在物理上是合理的。

常見錯誤

- 把樑的傾角當作 30°（即 XC 的傾角），而不是 60°。
- 求 N 時忘記了 F_1 的鉛垂分量。這樣會得出 $N = \frac{7}{4}W$，以及錯誤的 μ_2。
- 在樑對 X 的力矩方程中計入球體給予的摩擦力。這個力沿著樑的方向，所以它對 X 的力矩是零。

STEP 之外

平面上的剛體有三個自由度（degrees of freedom），所以可給出三條獨立的平衡方程。本題中，球體有五個未知的接觸力，而樑提供了 R，減少了未知數的數目。再加上兩個「極限摩擦」條件，問題便成為一個可解的方程組。像這樣把方程的數目與未知數的數目互相比較，並辨認出一個系統何時屬於靜不定（statically indeterminate），正是結構力學（structural mechanics）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體靜力學和力矩（torque）有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。